Voorbereidende sessie toelatingsexamen

Wiskunde 2 - Statistiek en kansrekening

Dr. Koen De Naeghel[1]

KU Leuven Kulak, woensdag 31 maart 2021

[1] Presentatie en opgeloste oefeningen zijn digitaal beschikbaar op http://www.koendenaeghel.be.

Inhoud

Leerstofafbakening

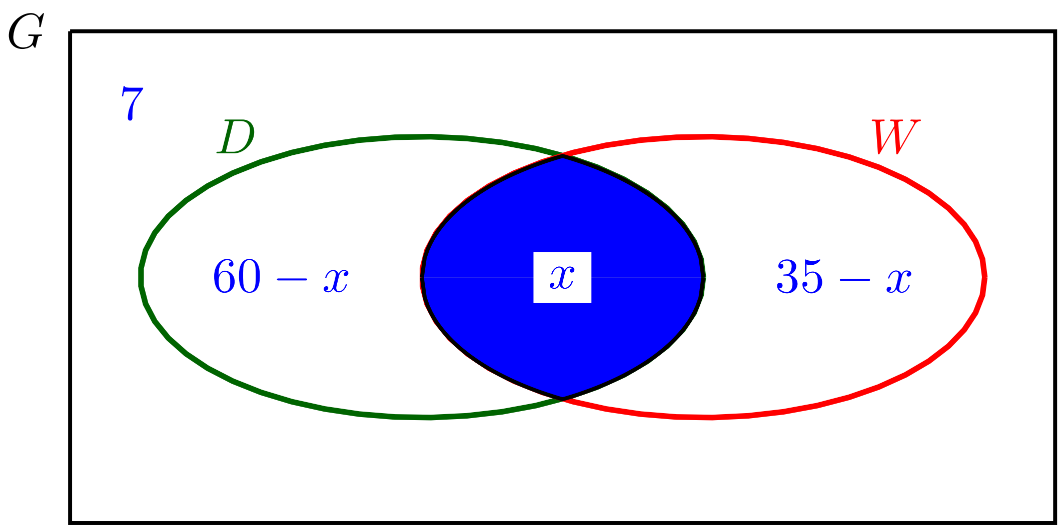
WISKUNDE

4. Statistiek en kansrekening
   (a) telproblemen waarbij volgorde en herhaling al dan niet van belang zijn
   (b) relatieve frequentie en kans
   (c) kansen en voorwaardelijke kansen
   (d) statistische gegevens, centrum- en spreidingsmaten en grafische voorstellingen van statistische gegevens
   (e) de normale verdeling als continu model bij data met een klokvormige frequentieverdeling
   (f) interpretatie bij een normale verdeling van relatieve frequentie als oppervlakte van een gepast gebied

Telproblemen - Verzamelingen

- **Voorbeeld 1** Aan 80 gepensioneerden wordt gevraagd of ze een abonnement hebben op een dagblad en/of een weekblad. Het blijkt dat 60 van hen een dagblad hebben en 35 een weekblad. Slechts 7 hebben geen van beide. Hoeveel hebben er een dagblad en een weekblad?

  Oplossing Noem x het aantal gepensioneerden (G) dat een dagblad (D) **en** een weekblad (W) heeft.



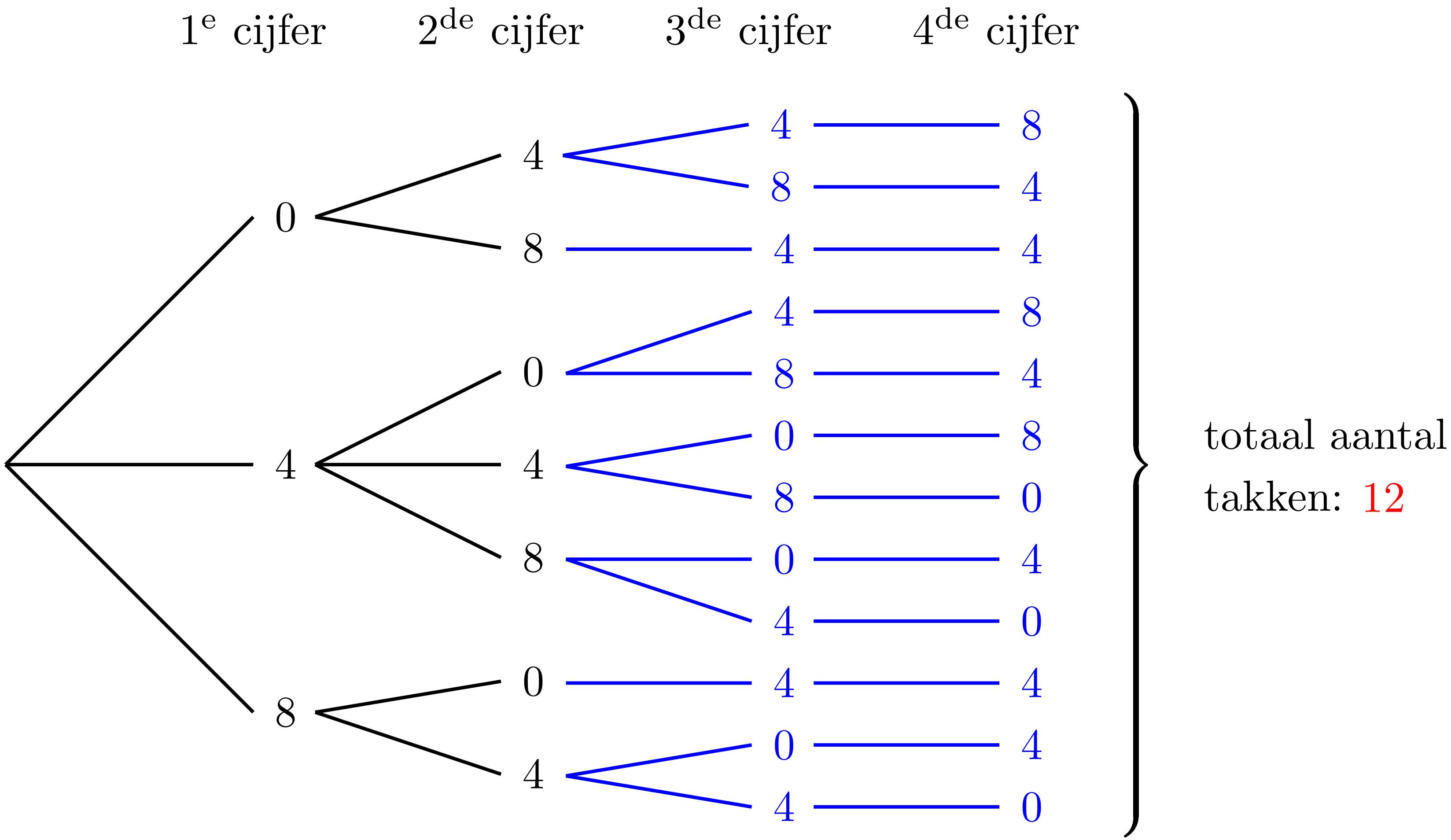
In het totaal zijn er 80 gepensioneerden, zodat

$$80 = (60 - x) + x + (35 - x) + 7 \quad \text{dus} \quad x = 22$$

Telproblemen - Boomdiagrammen

- **Voorbeeld 2** De code van een kluis bestaat uit vier cijfers: het cijfer 0, twee keer het cijfer 4 en het cijfer 8. Hoeveel codes zijn er mogelijk?

  Oplossing Bij een code is de **volgorde** van de cijfers belangrijk, dus tel het aantal mogelijkheden met een **boomdiagram**:



Telproblemen - Volgorde met herhaling (variaties)

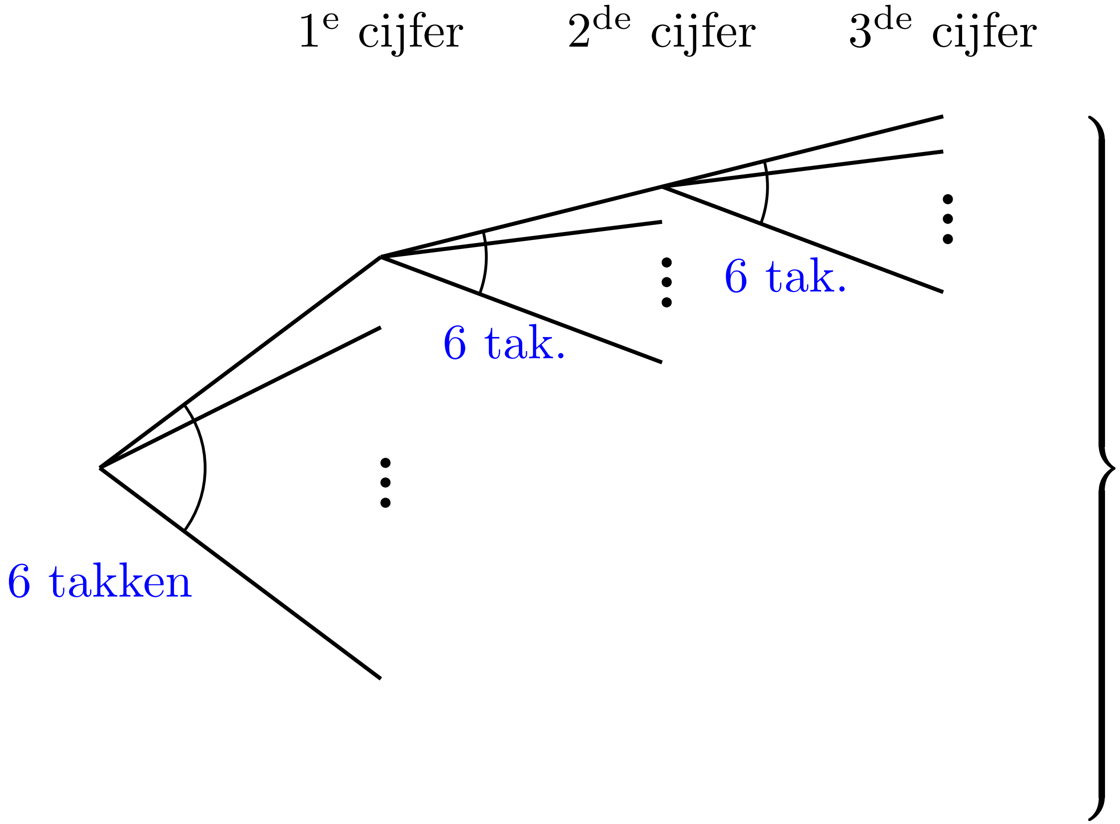
- **Voorbeeld 3** Hoeveel natuurlijke getallen zijn er met drie cijfers, te kiezen uit $4, 5, 6, 7, 8$ en 9?

  Oplossing

  Schrijf een voorbeeld op:

1^e	2^{de}	3^{de}
7	4	7

  De **volgorde** van de cijfers is belangrijk, dus tel het aantal mogelijkheden met een boomdiagram **met herhaling**:



totaal aantal takken: $6 \cdot 6 \cdot 6$
$= 6^3$
$= 216$

Telproblemen - Volgorde zonder herhaling (variaties)

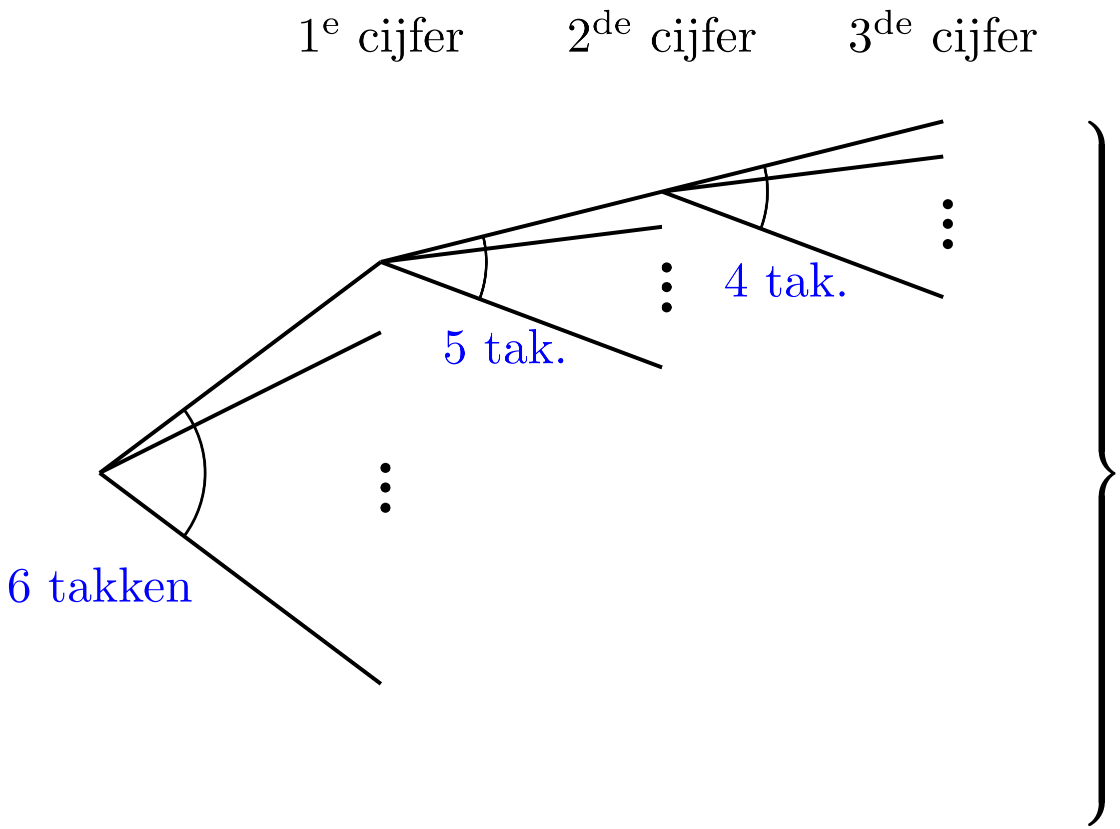
- **Voorbeeld 4** Hoeveel natuurlijke getallen zijn er met drie **verschillende** cijfers, te kiezen uit $4, 5, 6, 7, 8$ en 9?

  Oplossing

  Schrijf een voorbeeld op:

1^{e}	2^{de}	3^{de}
7	4	9

  De **volgorde** van de cijfers is belangrijk, dus tel het aantal mogelijkheden met een boomdiagram **zonder herhaling**:



totaal aantal takken: $6 \cdot 5 \cdot 4$
$= 120$

Telproblemen - Volgorde zonder herhaling (permutaties)

- **Voorbeeld 5** Hoeveel natuurlijke getallen zijn er met zes verschillende cijfers, te kiezen uit $4, 5, 6, 7, 8$ en 9?

  Oplossing

  Schrijf een voorbeeld op:

1^e	2^{de}	3^{de}	4^{de}	5^{de}	6^{de}
7	4	9	8	5	6

  De **volgorde** van de cijfers is belangrijk, dus tel het aantal mogelijkheden met een boomdiagram **zonder herhaling**:

  $$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

- Men schrijft $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ korter als $6!$
  Lees als: “zes-faculteit”

  $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
  $5! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5 = 120$
  $1! = 1$
  $0! = 1$ (afspraak)

$$\boxed{\text{Onthoud: } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}$$

Telproblemen - Geen volgorde (combinaties)

- **Voorbeeld 6** Op hoeveel manieren kan men een groepje van drie leerlingen kiezen uit een klas van 12?

Oplossing

Schrijf een voorbeeld op:

Bij een groepje is de **volgorde** van de leerlingen **onbelangrijk**.
In dit geval kunnen we **niet tellen met een boomdiagram!**
In plaats daarvan gebruiken we de formule

$$C_{12}^{3} = \frac{12!}{3! \cdot (12-3)!}$$

$$= \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ \cdot \ \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9}}$$

$$= 10 \cdot 11 \cdot 2$$

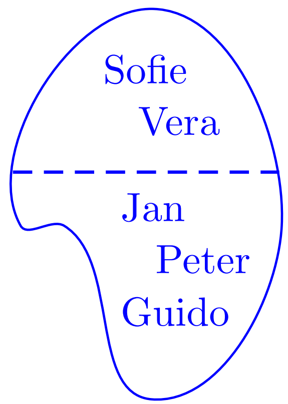
$$= 220$$

Telproblemen - Groep van twee groepjes

- **Voorbeeld 7** Op hoeveel manieren kan men een groep vormen van twee meisjes en drie jongens als men voor de meisjes kan kiezen uit 6 kandidaten en voor de jongens uit 5 kandidaten?

Oplossing

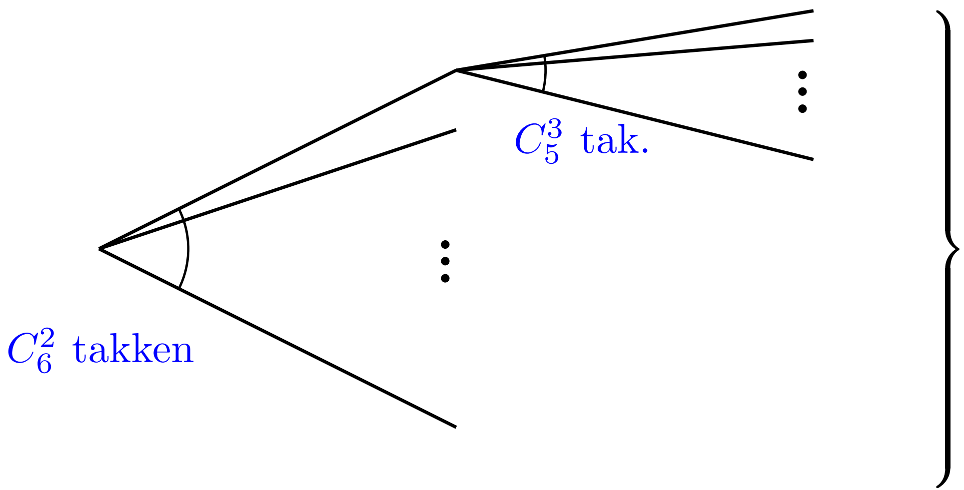
Schrijf een voorbeeld op:



Hoe maken we zo'n groep?

kies eerst groepje van twee meisjes

kies daarna groepje van drie jongens



totaal aantal takken: $C_6^2 \cdot C_5^3$

$$= \frac{6!}{2!\,4!} \cdot \frac{5!}{3!\,2!}$$

$$= 15 \cdot 10 = 150$$

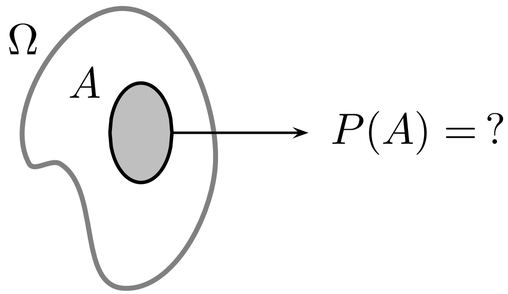
Kansrekenen - Basisbegrippen

- **Doel van kansrekenen** Bij een experiment

  schrijft men een uitkomstenverzameling met Ω,

  noemt men elke deelverzameling A van Ω een gebeurtenis,

  hecht men aan A een getal $P(A)$, genaamd *de kans op* A.



- **Expliciet voorbeeld**

  Experiment: eenmaal gooien met een dobbelsteen.

  Uitkomstenverzameling: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

  Gebeurtenis "een 1 **of** een 5 gooien" is een **unie**:

$$\begin{aligned} A &= \{1\} \cup \{5\} \\ &= \{1, 5\} \end{aligned}$$

  Gebeurtenis "oneven getal **en** drievoud gooien" is **doorsnede**:

$$\begin{aligned} B &= \{1, 3, 5\} \cap \{3, 6\} \\ &= \{3\} \end{aligned}$$

  Omdat $A \cap B = \emptyset$ noemt men gebeurtenissen A en B **disjunct**.

Kansrekenen - Wet van Laplace

- **Als** elke uitkomst in Ω even waarschijnlijk is, dan gebruikt men de wet van Laplace

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}} = \frac{\#A}{\#\Omega}}$$

- **Expliciet voorbeeld**

  Experiment: eenmaal gooien met een **eerlijke** dobbelsteen.
  Gebeurtenis "even getal **en niet** 2 gooien" is een **verschil**:

$$\begin{aligned} A &= \{2, 4, 6\} \setminus \{2\} \\ &= \{4, 6\} \end{aligned}$$

  De kans op A is $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega} = \dfrac{2}{6} \approx 33\%$

Kansrekenen - Wet van Laplace

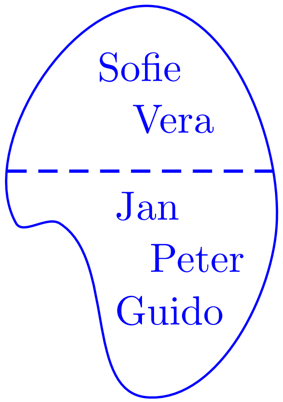
- **Voorbeeld 8** Uit een klas van 6 meisjes en 5 jongens kiest men een groep van 5 leerlingen. Wat is de kans dat de groep bestaat uit 2 meisjes en 3 jongens? (op 10% nauwkeurig)

  Oplossing

  Het aantal mogelijke uitkomsten is

  $$\#\Omega = C_{11}^{5} = \frac{11!}{5!6!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 462$$

  Een gunstige uitkomst is

  Het aantal gunstige uitkomsten is (zie Voorbeeld 7):

  $$\#G = C_6^2 \cdot C_5^3 = \ldots = 150$$

  Wet van Laplace:

  $$P(G) = \frac{\#G}{\#\Omega} = \frac{150}{462} = \frac{50}{154} = \frac{25}{77} \approx \frac{25}{75} \approx 30\%$$

Kansrekenen - Wet van Laplace... of niet?

- **Als** elke uitkomst in Ω even waarschijnlijk is, dan gebruikt men de wet van Laplace

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}} = \frac{\#A}{\#\Omega}}$$

- **Als niet** elke uitkomst even waarschijnlijk is, dan mag men de wet van Laplace niet gebruiken!
  In dat geval tracht men de kans te berekenen via

$$\boxed{\text{kanswetten en kansbomen}}$$

- **Expliciet voorbeeld**
  Experiment: eenmaal gooien met een **oneerlijk** muntstuk.
  Uitkomstenverzameling: $\Omega = \{K, M\}$
  Gegeven is $P(K) = 72\%$
  Dan is
  $$\begin{aligned} P(M) &= P(\text{niet } K) \\ &= P(\overline{K}) \\ &= 1 - P(K) \\ &= 1 - 0,72 = 28\% \end{aligned}$$

Kansrekenen - Kanswetten

Wet 1 $P(\Omega) = 1$ *kans zekere gebeurtenis*

Wet 2 $0 \leq P(A) \leq 1$ *kans tussen 0% en 100%*

Wet 3 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *kans op disjuncte unie*
enkel als $A \cap B = \emptyset$ *(somregel)*

Wet 4 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ *kans niet gebeurtenis A* *(complementenregel)*

Wet 5 $P(\emptyset) = 0$ *kans onmog. gebeurtenis*

Wet 6 $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ *kans op een verschil*

Wet 7 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *kans op een unie*
mag altijd *(wet van Boole)*

Wet 8 $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Wet 9 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ *kans op onafh. doorsnede*
enkel als A en B onafhankelijk zijn *(productregel)*

Kansrekenen - Kanswetten

- **Voorbeeld 9** De kans dat iemand aan Alzheimer lijdt hangt af van zijn leeftijd en geslacht. Voor mannen van 75 tot 79 jaar is deze kans 5% en voor vrouwen van 80 tot 84 jaar is dit 8%. Stel dat we twee, onderling niet verwante, personen selecteren: een man van 77 jaar, een vrouw van 82 jaar. Wat is de kans dat precies één van de twee aan Alzheimer lijdt?

  Oplossing

$$
\begin{aligned}
& P(\text{precies één van de twee lijdt aan Alzheimer}) \\
&= P\Big((\text{man Alzh. en vrouw niet}) \text{ of } (\text{vrouw Alzh. en man niet})\Big) \\
&= P\left((M \cap \overline{V}) \cup (\overline{M} \cap V)\right) \\
&= P(M \cap \overline{V}) + P(\overline{M} \cap V) && \textit{somregel} \\
&= P(M) \cdot P(\overline{V}) + P(\overline{M}) \cdot P(V) && \textit{productregel} \\
&= P(M) \cdot \Big(1 - P(V)\Big) + \Big(1 - P(M)\Big) \cdot P(V) && \textit{complementenregel} \\
&= \frac{5}{100} \cdot \frac{92}{100} + \frac{95}{100} \cdot \frac{8}{100} \\
&= \frac{460 + 760}{10\,000} = \frac{1220}{10\,000} = 12{,}2\%
\end{aligned}
$$

Kansrekenen - Kansbomen en voorwaardelijke kans

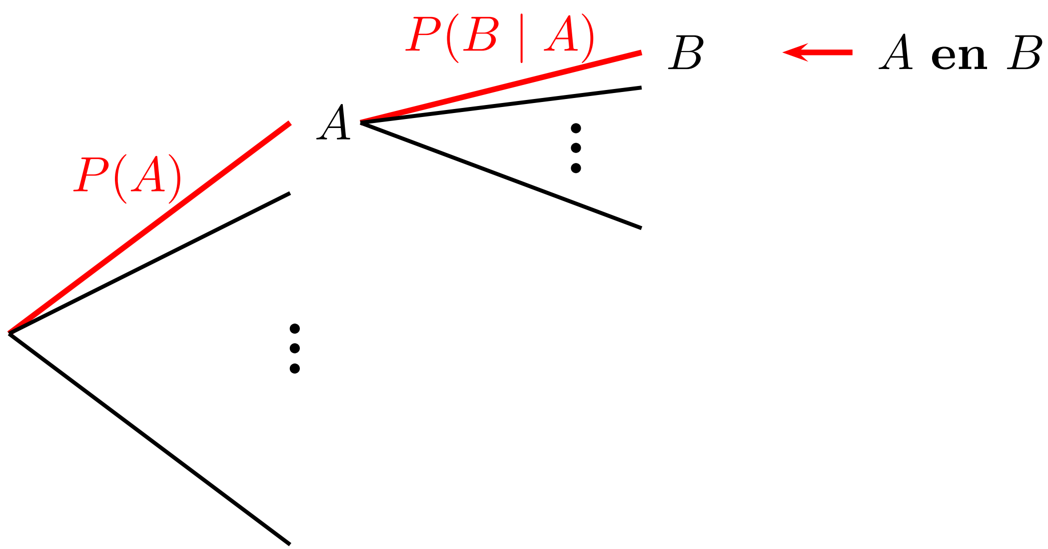
Wet 10 $P(A \cap B) = ?$ *kans op doorsnede*

mag altijd

Notatie Voor twee gebeurtenissen A en B is

$$P(B \mid A) = \text{ de kans op } B \textbf{ als je weet dat } A \text{ optreedt}$$

Kansboom:



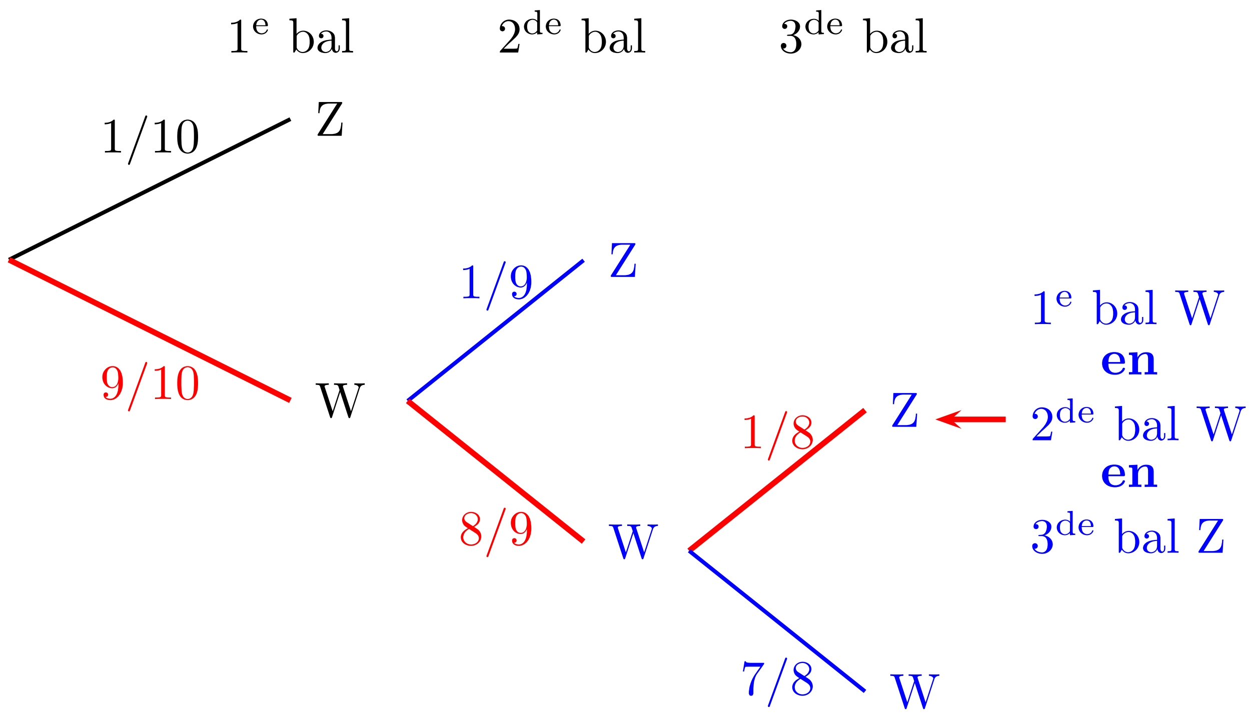
Wet 10 $P(A \cap B) \stackrel{\text{def}}{=} P(A) \cdot P(B \mid A)$ *kans op doorsnede*

mag altijd

Kansrekenen - Kansbomen en voorwaardelijke kans

- **Voorbeeld 10** In een urne zitten 1 zwarte en 9 witte ballen. Eén voor één wordt er ad random een bal uit de urne getrokken. De ballen worden na het trekken niet teruggeplaatst. Wat is de kans dat de zwarte bal als derde bal uit de urne komt?

  Oplossing Bij het trekken is de volgorde van de kleuren belangrijk, dus bereken de kans met een **kansboom**:

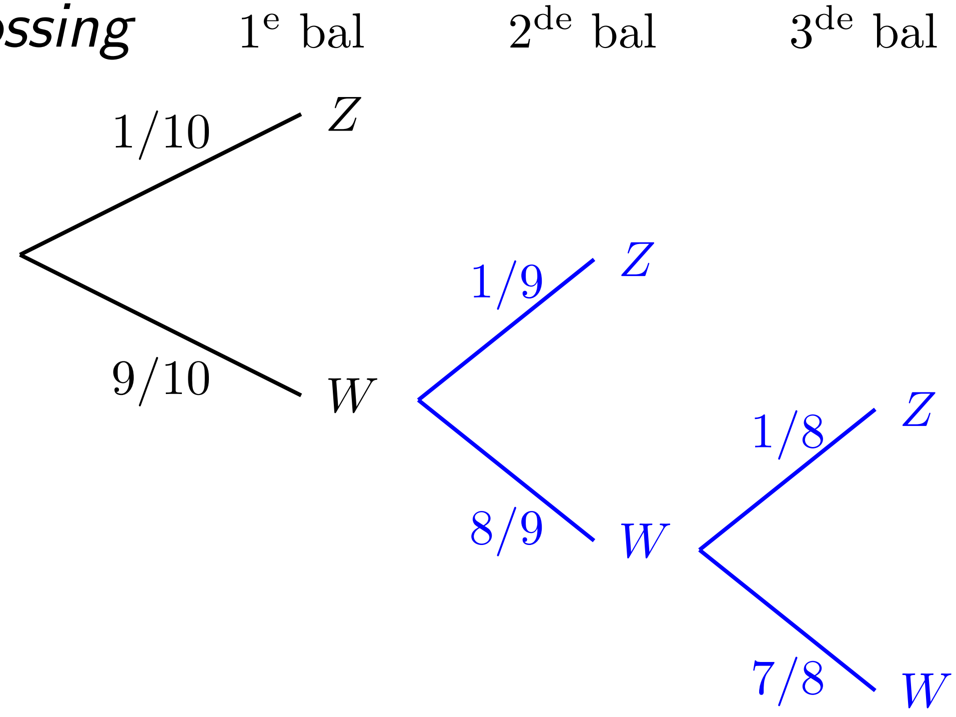


$$P(\text{zwarte bal als derde}) = P(\text{WWZ}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = 10\%$$

Kansrekenen - Kansbomen en voorwaardelijke kans

- **Voorbeeld 11** In een urne zitten 1 zwarte en 9 witte ballen. Eén voor één wordt er ad random een bal uit de urne getrokken. De ballen worden na het trekken niet teruggeplaatst. Wat is de kans dat de zwarte bal **ten laatste** als derde bal uit de urne komt?

Oplossing

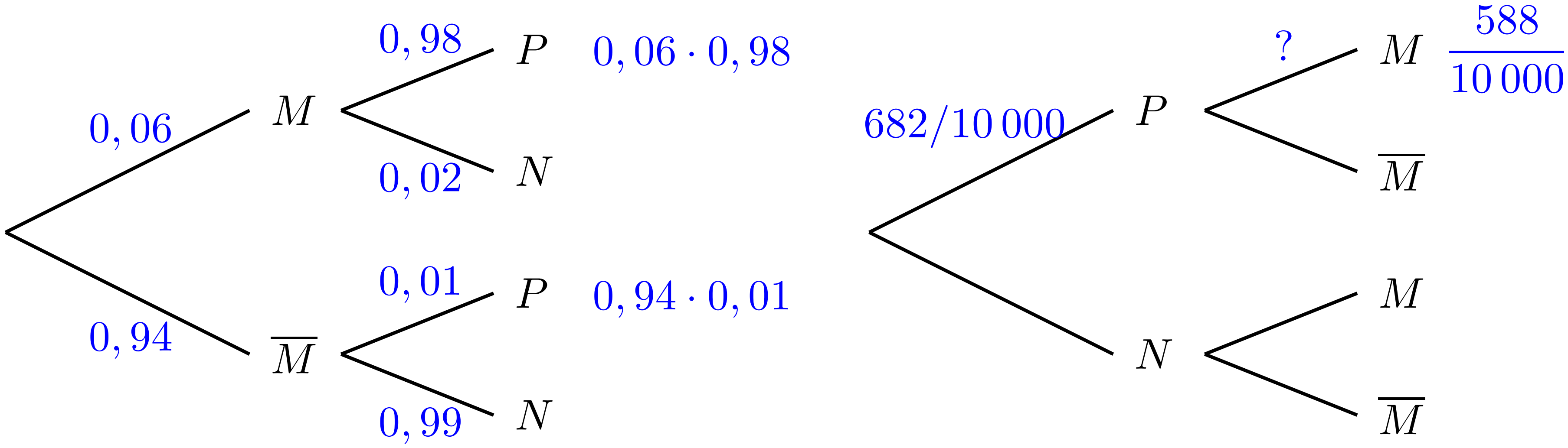


$$
\begin{aligned}
P(\text{zwarte bal ten laatste derde}) &= P(\text{Z of WZ of WWZ}) \\
&= P(\text{Z}) + P(\text{WZ}) + P(\text{WWZ}) \\
&= \frac{1}{10} + \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9} + \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8} = 30\%
\end{aligned}
$$

Kansrekenen - Kansbomen en voorwaardelijke kans

- **Voorbeeld 12** In een bepaald land is 6% van de inwoners besmet met malaria. Er is een test ontwikkeld om malaria op te sporen. Deze test is echter niet altijd correct. Voor personen die niet aan de ziekte lijden, geeft de test in 1% van de gevallen een foute diagnose. Personen die wel aan de ziekte lijden, krijgen in 2% van de gevallen een foute diagnose. Wat is de kans dat iemand waarvoor de test positief was inderdaad malaria heeft? (op 10% nauwkeurig)

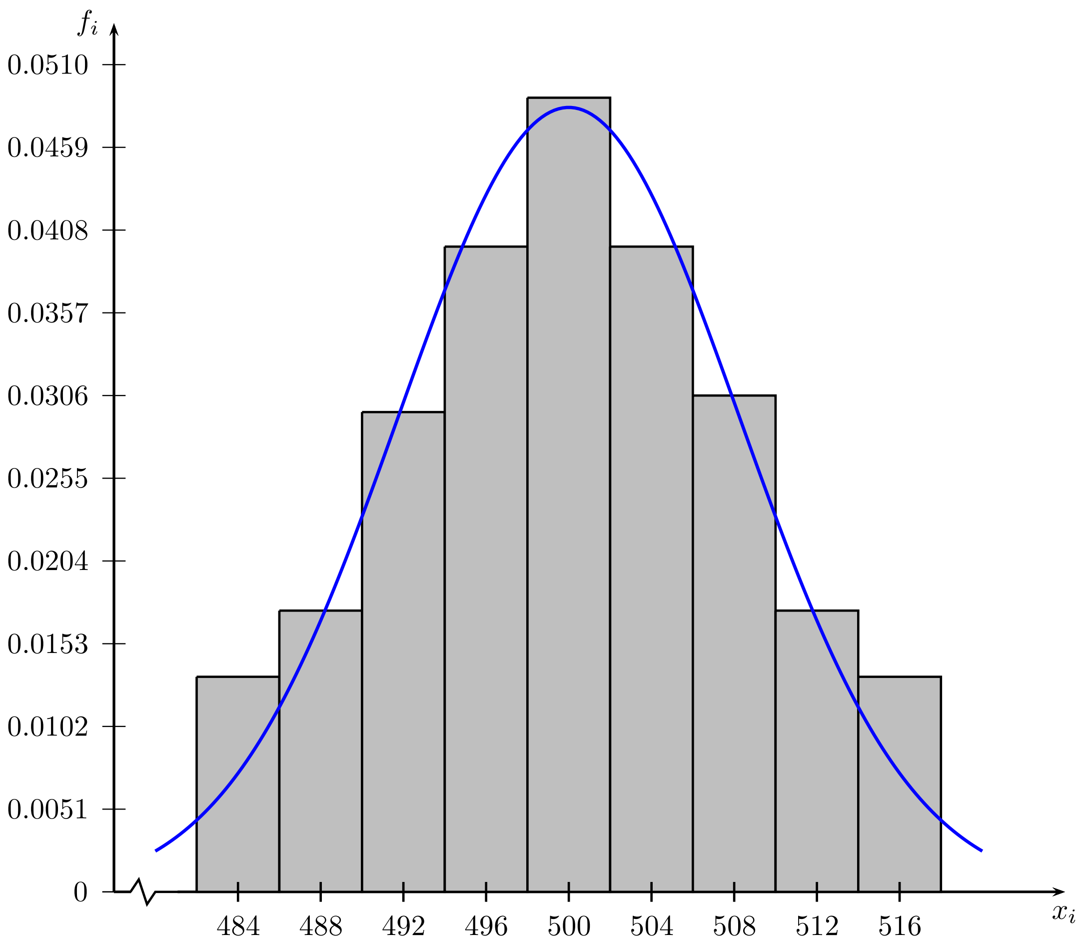
  Oplossing We kunnen twee kansbomen opstellen:



$$P(M|P) = \frac{P(M \cap P)}{P(P)} = \frac{P(M) \cdot P(P\,|\,M)}{P(P)} = \frac{588/10\,000}{682/10\,000} \approx 80\%$$

Statistiek - Normale verdeling

- **Inleiding** Een medicijn wordt verkocht in flesjes van 500 ml. We nemen een steekproef van 245 willekeurige flesjes, en meten telkens de inhoud op $0,1$ ml nauwkeurig.
  Het staafdiagram werd herschaald zodat de totale oppervlakte van de staafjes gelijk is aan $1 = 100\%$.

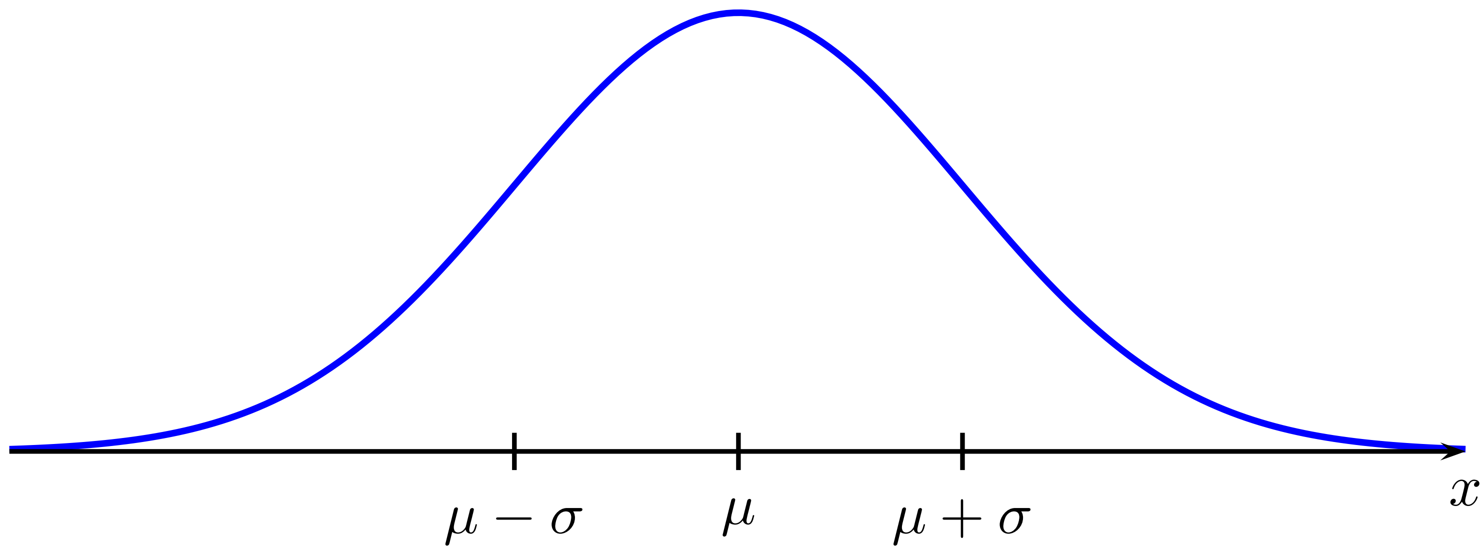


Statistiek - Normale verdeling

- **Betekenis** In heel wat situaties heeft een staafdiagram van meetresultaten de vorm van een *normale verdeling*, met

  μ het gemiddelde,

  σ een maat voor de spreiding (*standaardafwijking*).



- **Eigenschappen**

  De top van de grafiek bevindt zich boven μ

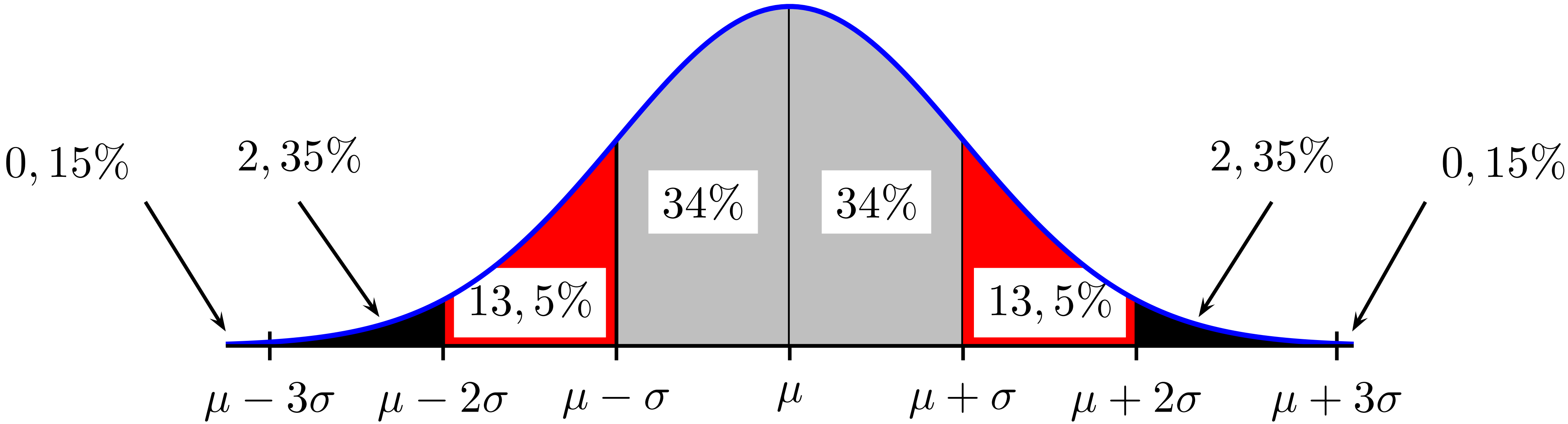
  De buigpunten van de grafiek bevinden zich boven $\mu \pm \sigma$

Statistiek - Normale verdeling

- **Betekenis** In heel wat situaties heeft een staafdiagram van meetresultaten de vorm van een *normale verdeling*, met

  μ het gemiddelde,

  σ een maat voor de spreiding (*standaardafwijking*).



- **Eigenschappen**

  68% van de waarden bevinden zich tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$

  95% van de waarden bevinden zich tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$

  $99,7\%$ van de waarden bevinden zich tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$

Statistiek - Normale verdeling

- **Voorbeeld 13** Luizen vormen een vervelend probleem dat vooral bij kinderen van de basisschool welig tiert. De overlevingstijd van een luis die van het hoofd op het hoofdkussen gevallen is, is normaal verdeeld met een gemiddelde van $2,2$ dagen en een standaardafwijking van $0,4$ dagen. We kunnen dan verwachten dat 90% van de luizen dood is na

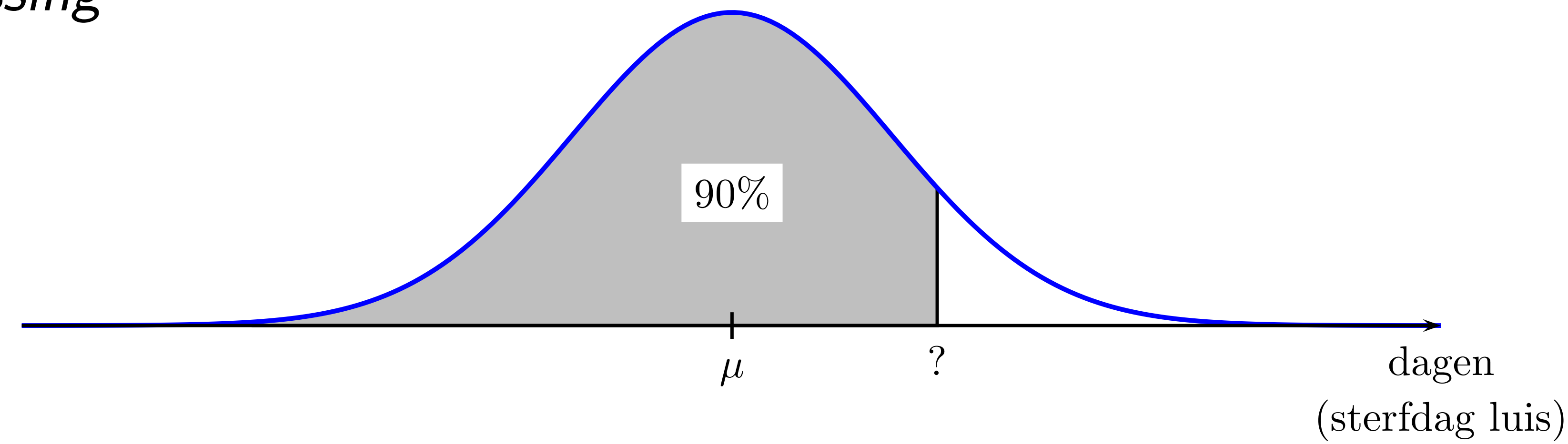
(A) ongeveer $2,5$ dagen

(B) ongeveer $2,6$ dagen

(C) ongeveer $2,7$ dagen

(D) ongeveer $3,0$ dagen

Oplossing



- **Voorbeeld 13** Luizen vormen een vervelend probleem dat vooral bij kinderen van de basisschool welig tiert. De overlevingstijd van een luis die van het hoofd op het hoofdkussen gevallen is, is normaal verdeeld met een gemiddelde van $2,2$ dagen en een standaardafwijking van $0,4$ dagen. We kunnen dan verwachten dat 90% van de luizen dood is na

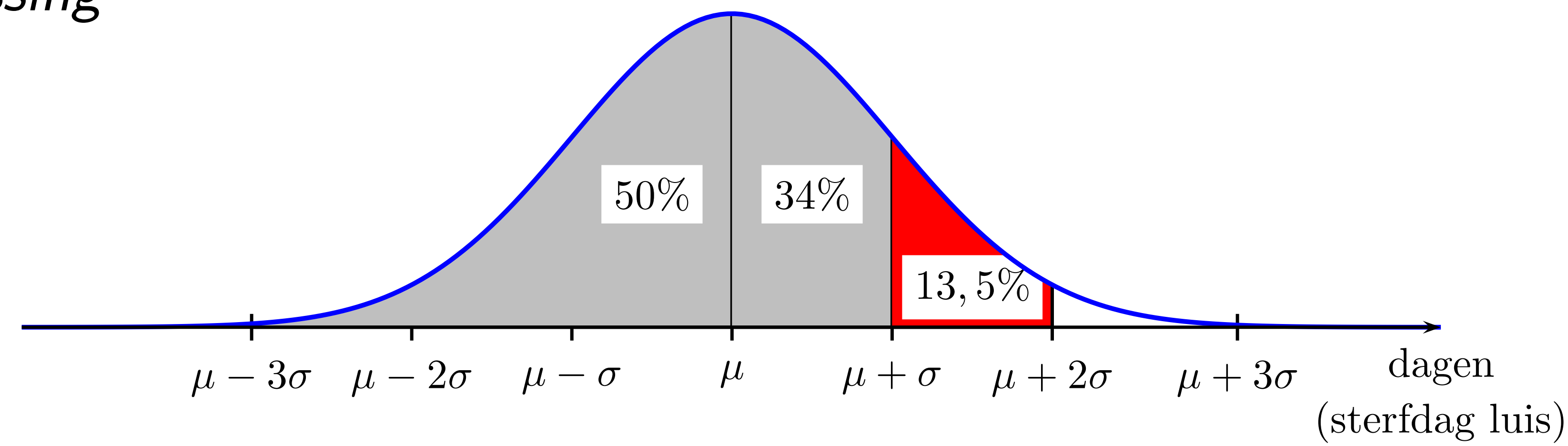
(A) ongeveer $2,5$ dagen

(B) ongeveer $2,6$ dagen

(C) ongeveer $2,7$ dagen

(D) ongeveer $3,0$ dagen

Oplossing



Nu is $84\% < 90\% < 97,5\%$ zodat $2,6 <?< 3$ antwoord (C).

Examenvragen

- **Augustus 2016 - Vraag 13** Twee jongens en zes meisjes nemen in een willekeurige volgorde plaats op een van de acht stoelen die naast elkaar op een rij staan. Hoe groot is de kans dat er precies twee meisjes tussen de twee jongens zitten?

(A) 1/7 (C) 5/28

(B) 1/14 (D) 5/56

Oplossing

aantal mogelijke uitkomsten: $8!$

aantal gunstige uitkomsten: $2\cdot 6! + 2\cdot 6! + 2\cdot 6! + 2\cdot 6! + 2\cdot 6!$

	J	M	M	J	M	M	M	M	$2\cdot 6\cdot 5\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 2\cdot 6!$
of		J			J				$= 2\cdot 6!$
of			J			J			$= 2\cdot 6!$
of				J			J		$= 2\cdot 6!$
of					J			J	$= 2\cdot 6!$

Wet van Laplace:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{5\cdot 2\cdot 6!}{8!} = \frac{5\cdot 2}{8\cdot 7} = \frac{5}{4\cdot 7} = \frac{5}{28} \text{ antwoord } (C).$$

Examenvragen

- **Juli 2016 - Vraag 5** Judoclub Yuko neemt deel aan een internationale competitie met zeven van haar leden. Op de wedstrijddag worden alle zeven judoka's één voor één gewogen. Tijdens het wegen houdt de manager van de club het gemiddeld gewicht bij van de leden die reeds gewogen werden. Hij observeert dat het gemiddeld gewicht bij elk nieuwe weging met 1 kg toeneemt. Hoeveel weegt de zwaarste van de zeven judoka's meer dan de lichtste?

(A) 14 kg

(B) 12 kg

(C) 10 kg

(D) 7 kg

Oplossing Zoek een patroon.

judoka	gewicht	gemiddeld gewicht	
1	a	a	dus $a = a + 0$
2	b	$\frac{a+b}{2} = a + 1$	dus $b = a + 2$
3	c	$\frac{a+a+2+c}{3} = a + 2$	dus $c = a + 4$

Elke judoka weegt 2 kg meer dan de vorige dus antwoord (B).

Examenvragen

- **Augustus 2016 - Vraag 7** PSA (Prostaat-Specifiek Antigeen) is een proteïne dat geproduceerd wordt door cellen in de prostaatklier. Door het opmeten van de PSA-waarde in het bloed kan men bij mannen het risico op prostaatkanker bepalen. In een medisch labo gebruikt men drie toestellen om PSA-waarden te bepalen:
  - met toestel T_1 is er 1% kans op een foute analyse en dit toestel wordt bij 60% van de analyses gebruikt;
  - met toestel T_2 is er 2% kans op een foute analyse en dit toestel wordt bij 30% van de analyses gebruikt;
  - met toestel T_3 is er 4% kans op een foute analyse en dit toestel wordt bij 10% van de analyses gebruikt.

  Als men vaststelt dat de PSA-analyse van een bepaald bloedstaal onjuist is, hoe groot is dan de kans dat men hierbij toestel T_1 of toestel T_2 heeft gebruikt?

  (A) 75%

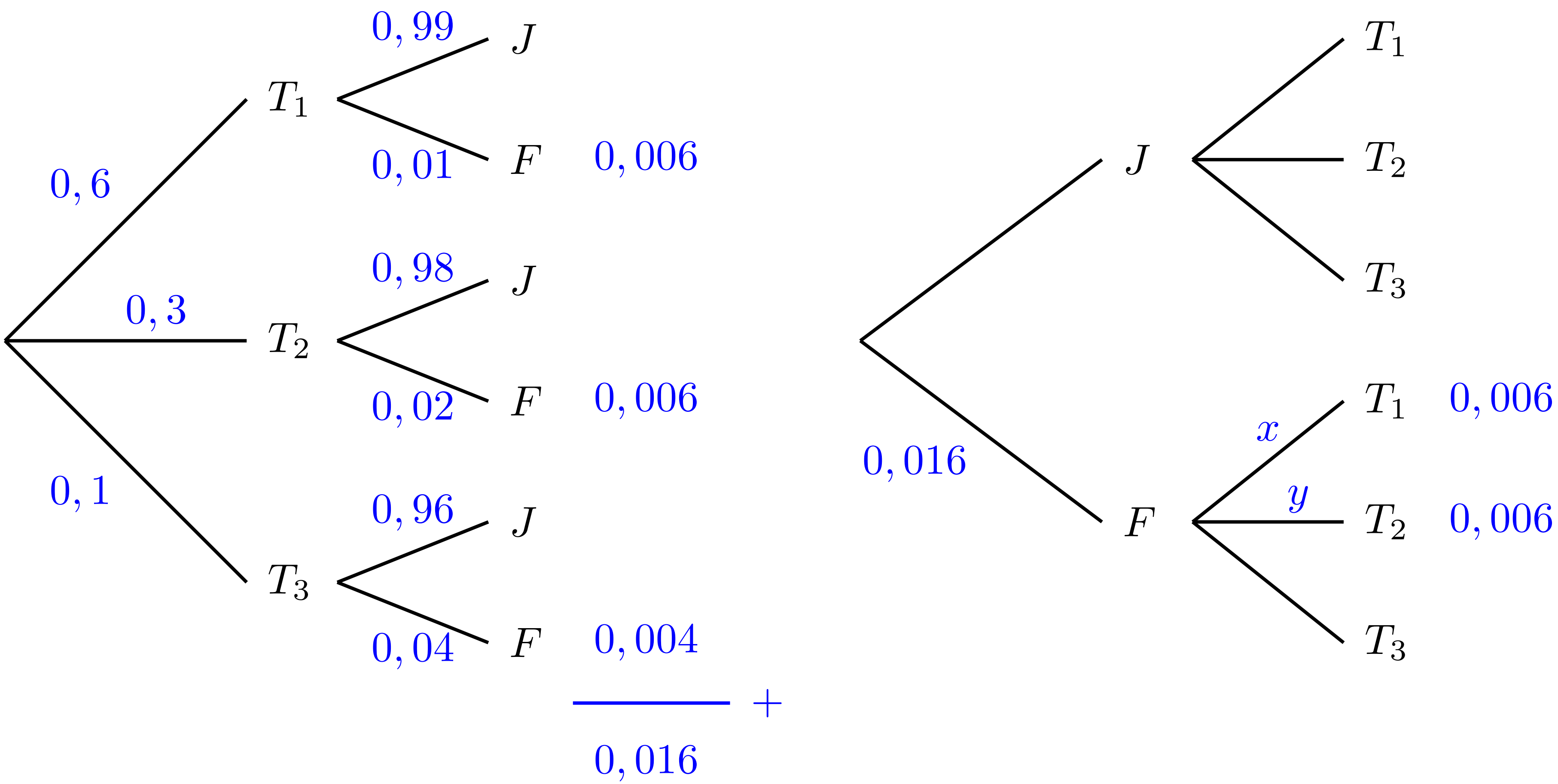
  (B) 72%

  (C) 68%

  (D) 65%

Examenvragen

- **Augustus 2016 - Vraag 7 (vervolg)**
  Oplossing We kunnen twee kansbomen opstellen:



$P(T_1 \text{ of } T_2 \,|\, F) = P(T_1 \,|\, F) + P(T_2 \,|\, F) = x + y = 6/8 = 75\%$ dus (A)

$$0,016 \cdot x = 0,006 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{0,006}{0,016} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = y$$