

# Vorbereidende sessie toelatingsexamen

Wiskunde 2 - Algebra en meetkunde

Dr. Koen De Naeghel<sup>1</sup>

KU Leuven Kulak, woensdag 31 maart 2021

---

<sup>1</sup> Presentatie en opgeloste oefeningen zijn digitaal beschikbaar op <http://www.koendenaeghel.be>.

# Inhoud

## Leerstofafbakening

### Algebra

- Rekenen met absolute waarde
- Rekenregels van machtsverheffing
- Rekenregels van logaritme
- Bewerkingen met veeltermen

### Meetkunde

- Sinus, cosinus en tangens
- Eigenschappen van een driehoek en cirkel
- Vergelijking van een rechte, cirkel en parabool
- Gemeenschappelijke punten

### Examenvragen

### Actief gedeelte - Maken van oefeningen

- Algebra
- Meetkunde
- Antwoorden

# Leerstofafbakening

## WISKUNDE

### 1. Algebra

- (a) bewerkingen van reële getallen en rekenregels
- (b) rekenen met absolute waarde van reële getallen
- (c) rekenregels van machtsverheffing en logaritme
- (e) reële oplossingen van vierkantsvergelijkingen
- (f) veeltermen met reële coëfficiënten: bewerkingen, ontbinden in factoren van veeltermen in eenvoudige gevallen, veeltermvgn.

### 2. Meetkunde

- (a) eigenschappen van driehoeken, vierhoeken en cirkels
- (b) omtrek en oppervlakte van driehoeken, vierhoeken en cirkels
- (c) snijpunten van rechten en cirkels, snijpunten van rechten en parabolen
- (d) meten van hoeken in graden en radialen
- (e) de goniometrische getallen van hoeken en van verwante hoeken
- (f) goniometrische getallen in functie van de lengten van de zijden in een rechthoekige driehoek
- (g) goniometrische formules: grondformule, verdubbelingsformule

# Algebra - Rekenen met absolute waarde

► **Algemeen**

$$|x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

► **Voorbeeld 1** Welke waarden  $x$  voldoen aan de ongelijkheid

$$\left| x - \frac{5}{2} \right| < 2$$

$$\Leftrightarrow -2 < x - \frac{5}{2} < 2$$

$$\Leftrightarrow -2 + \frac{5}{2} < x < 2 + \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{2} + \frac{5}{2} < x < \frac{4}{2} + \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right[$$

Onthoud:

$$|\Delta| < a \Leftrightarrow -a < \Delta < a$$

# Algebra - Rekenregels van machtsverheffing

- **Voorbeeld 2** Gegeven is de functie  $f(x) = 9^{-x}$ . Vereenvoudig

$$A = \frac{f\left(x - \frac{1}{2}\right) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)}{f(x + 1) - f(x - 1)}$$

$$= \frac{9^{-(x-\frac{1}{2})} - 9^{-(x+\frac{1}{2})}}{9^{-(x+1)} - 9^{-(x-1)}}$$

$$= \frac{9^{-x+\frac{1}{2}} - 9^{-x-\frac{1}{2}}}{9^{-x-1} - 9^{-x+1}}$$

$$= \frac{9^{-x} \cdot 9^{\frac{1}{2}} - 9^{-x} \cdot 9^{-\frac{1}{2}}}{9^{-x} \cdot 9^{-1} - 9^{-x} \cdot 9^1}$$

$$= \frac{9^{\frac{1}{2}} - 9^{-\frac{1}{2}}}{9^{-1} - 9^1}$$

$$= \frac{\sqrt{9} - \frac{1}{\sqrt{9}}}{\frac{1}{9} - 9}$$

$$= \frac{3 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{9} - 9} \cdot \frac{9}{9} = \frac{27 - 3}{1 - 81} = -\frac{24}{80} = -\frac{3}{10}$$

$$f(\square) = 9^{-\square}$$

$$-(\square + \triangle) = -\square - \triangle$$

$$a^{\square+\triangle} = a^{\square} \cdot a^{\triangle}$$

$$a^{-\square} = \frac{1}{a^{\square}}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

# Algebra - Rekenregels van logaritme

► **Algemeen**

$$a \log x = * \Leftrightarrow x = a^*$$

en

$$e \log x = \ln x$$

Voorbeeld:  ${}^2 \log 16 = 4$  want  $16 = 2^4$

► **Voorbeeld 3** Los de volgende vergelijking op naar  $x$ :

$$3^{x-1} = 8^{3x}$$

$$\Leftrightarrow \ln(3^{x-1}) = \ln(8^{3x})$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \ln 3 = 3x \ln 8$$

$$\Leftrightarrow x \ln 3 - \ln 3 = 3x \ln 8$$

$$\Leftrightarrow x(\ln 3 - 3 \ln 8) = \ln 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 3}{\ln 3 - 3 \ln 8}$$

$$= \frac{\ln 3}{\ln 3 - \ln(8^3)}$$

$$= \frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{3}{512}\right)}$$

$$\ln(a^{\square}) = \square \ln a$$

$$\ln(\square \cdot \triangle) = \ln \square + \ln \triangle$$

$$\ln\left(\frac{\square}{\triangle}\right) = \ln \square - \ln \triangle$$

# Algebra - Bewerkingen met veeltermen

- **Voorbeeld 4** Hoeveel bedraagt de som  $p + q$  als

$$\frac{x(2x + 3)}{x^2 + 3x + 2} = \frac{p(x + 1)}{x + 2} + \frac{q}{x + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{x(2x + 3)}{(x + 2)(x + 1)} = \frac{p(x + 1)}{x + 2} + \frac{q}{x + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{x(2x + 3)}{(x + 2)(x + 1)} = \frac{p(x + 1)}{x + 2} \cdot \frac{x + 1}{x + 1} + \frac{q}{x + 1} \cdot \frac{x + 2}{x + 2}$$

$$\Rightarrow x(2x + 3) = p(x + 1)^2 + q(x + 2)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x = p(x^2 + 2x + 1) + qx + 2q$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x = px^2 + (2p + q)x + (p + 2q)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = p \\ 3 = 2p + q \\ 0 = p + 2q \end{cases}$$

$$\Rightarrow p = 2 \quad \text{en} \quad q = -1$$

$$\Rightarrow p + q = 1$$

# Algebra - Bewerkingen met veeltermen

- **Voorbeeld 5** Bepaal  $p(q + r)$  als  $x^4 + 4x^3 + 6px^2 + 4qx + r$  deelbaar is door  $x^3 + 3x^2 + 9x + 3$ .

*Oplossing* Dan moet

$$\begin{aligned} & x^4 + 4x^3 + 6px^2 + 4qx + r \\ = & (x^3 + 3x^2 + 9x + 3) \cdot (\dots x + \dots) \\ = & (x^3 + 3x^2 + 9x + 3) \cdot \left(1 \cdot x + \frac{r}{3}\right) \\ = & 1 \cdot x^4 + \left(\frac{r}{3} + 3\right) \cdot x^3 + (r + 9) \cdot x^2 + (3r + 3) \cdot x + r \end{aligned}$$

zodat

$$\begin{cases} 4 = \frac{r}{3} + 3 \\ 6p = r + 9 \\ 4q = 3r + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 3 \\ p = 2 \\ q = 3 \end{cases}$$

*Antwoord*  $p(q + r) = 2 \cdot (3 + 3) = 12$

(ALTERNATIEF: staartdeling)



# Algebra - Bewerkingen met veeltermen

- **Voorbeeld 6**  $f(x) = x^3 + px^2 - 8x + q$  is deelbaar door  $x - 1$  en de rest bij deling door  $x^2 - 9$  is  $x - 9$ . Wat is  $q$ ?

*Oplossing*

$$f(x) \text{ deelbaar door } x - 1 \Rightarrow f(x) = (x - 1) \cdot (\dots x^2 + \dots x + \dots)$$

$$\Rightarrow f(1) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + p - 8 + q = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{p + q = 7}$$

$f(x)$  delen door  $x^2 - 9$  geeft als rest  $x - 9$

$$\Rightarrow f(x) = (x^2 - 9) \cdot (\dots x + \dots) + x - 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(3) = 0 + 3 - 9 \\ f(-3) = 0 + (-3) - 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{9p + q = -9}$$

*Antwoord*  $q = 9$

# Algebra - Bewerkingen met veeltermen

► **Voorbeeld 7** Door welke veelterm is  $x^4 + 4$  deelbaar?

(A)  $x^2 - 2$

(C)  $x^2 + 2x - 2$

(B)  $x^2 + 2$

(D)  $x^2 + 2x + 2$

*Oplossing*

$$\begin{aligned} f(x) \text{ deelbaar door (A)} &\Rightarrow f(x) = (x^2 - 2) \cdot (\dots x^2 + \dots x + \dots) \\ &\Rightarrow f(\sqrt{2}) = 0 \\ &\Rightarrow 4 + 4 = 0 \text{ NEE!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) \text{ deelbaar door (B)} &\Rightarrow f(x) = (x^2 + 2) \cdot (\dots x^2 + \dots x + \dots) \\ &= (x^2 + 2) \cdot (x^2 + bx + 2) \\ &= x^4 + bx^3 + 4x^2 + 2bx + 4 \text{ NEE!} \end{aligned}$$

$$f(x) \text{ deelbaar door (C)} \Rightarrow \dots \text{ NEE!}$$

*Antwoord* (D)

# Algebra - Ontbinden in factoren van veeltermen

## ► Merkwaardige producten

$$a^2 + b^2 = \text{niet ontbindbaar in lineaire factoren}$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

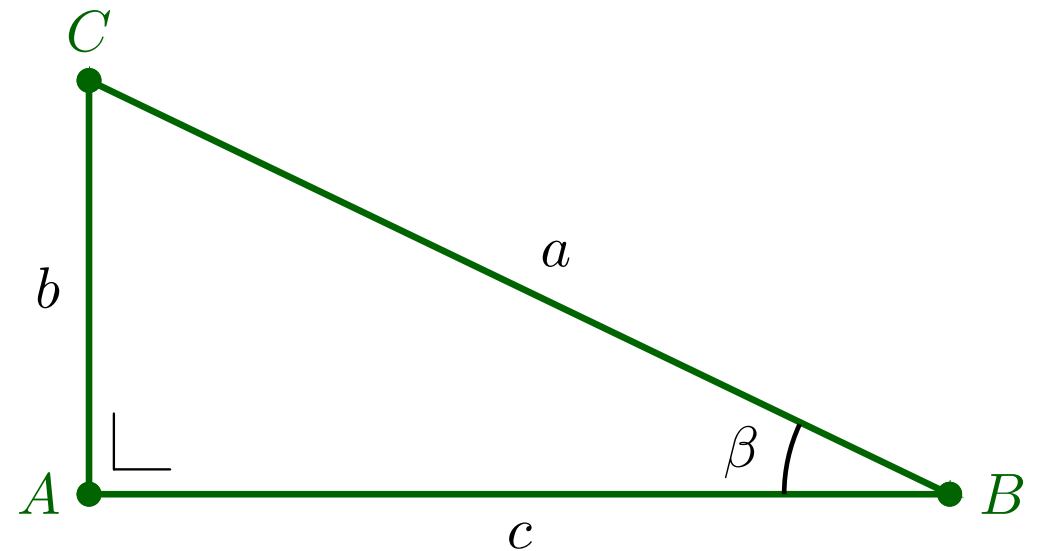
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

# Meetkunde - Sinus, cosinus en tangens van scherpe hoeken

$$\sin \beta = \frac{\text{overstaand}}{\text{schuin}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \beta = \frac{\text{aanliggend}}{\text{schuin}} = \frac{c}{a}$$

$$\tan \beta = \frac{\text{overstaand}}{\text{aanliggend}} = \frac{b}{c}$$



Veelvoorkomende scherpe hoeken:

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

# Meetkunde - Sinus, cosinus en tangens van will. hoeken

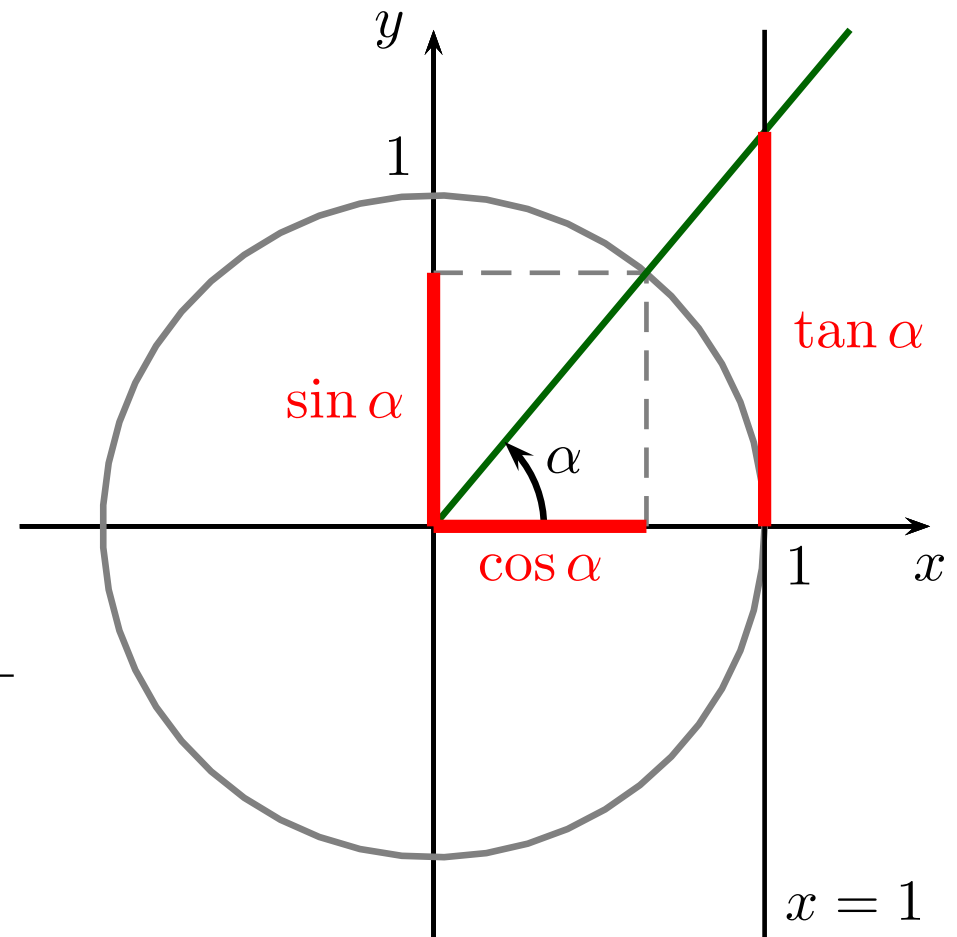
$\sin \alpha$  : projectie op  $y$ -as

$\cos \alpha$  : projectie op  $x$ -as

$\tan \alpha$  : projectie op rechte  $x = 1$

Teken van sinus, cosinus en tangens in de vier kwadranten:

$\alpha$	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-



Grondformule:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Verdubbelingsform.:  $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  en  $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

# Meetkunde - Sinus, cosinus en tangens van will. hoeken

## ► Voorbeeld 8

Gegeven zijn de coördinaten van een punt:  $x = -\sqrt{8} \sin 200^\circ$   
en  $y = -\sqrt{11} \cos 140^\circ$ . In welk kwadrant is dit punt gelegen?

(A) I

(C) III

(B) II

(D) IV

*Oplossing*

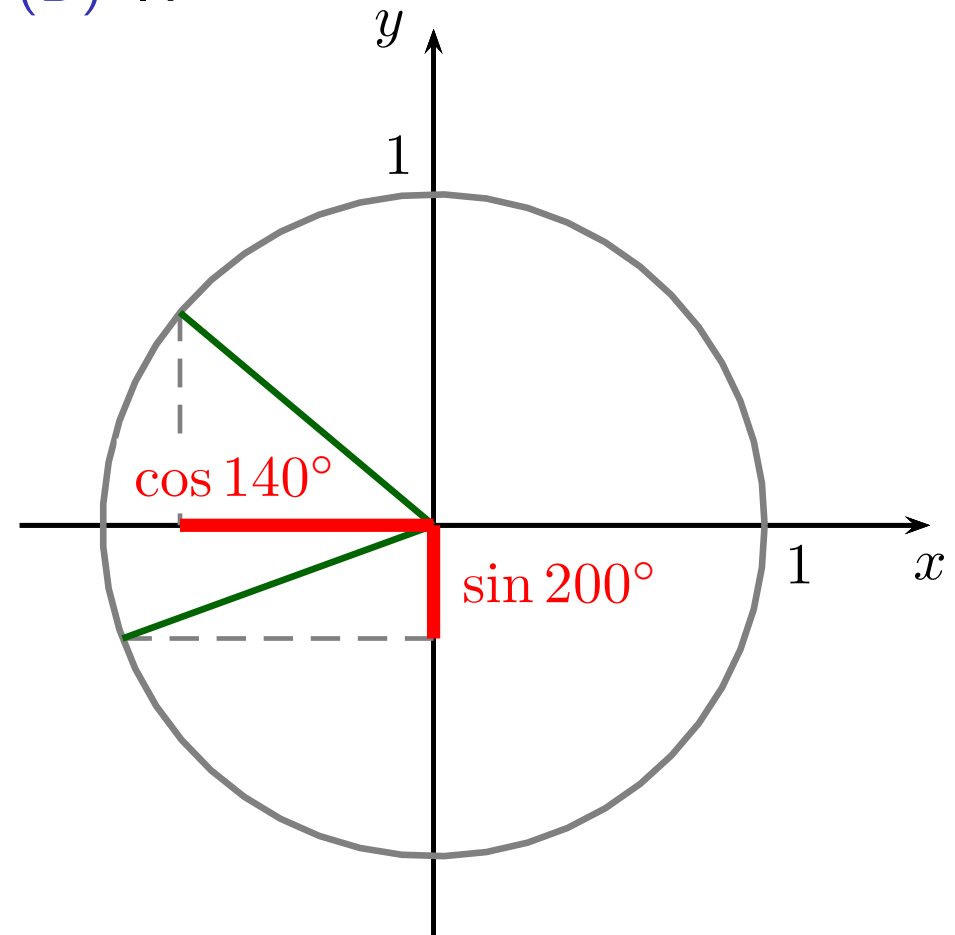
Lees het teken af:

$$\sin 200^\circ < 0$$

$$\cos 140^\circ < 0$$

Dus  $x > 0$  en  $y > 0$

*Antwoord* (A)



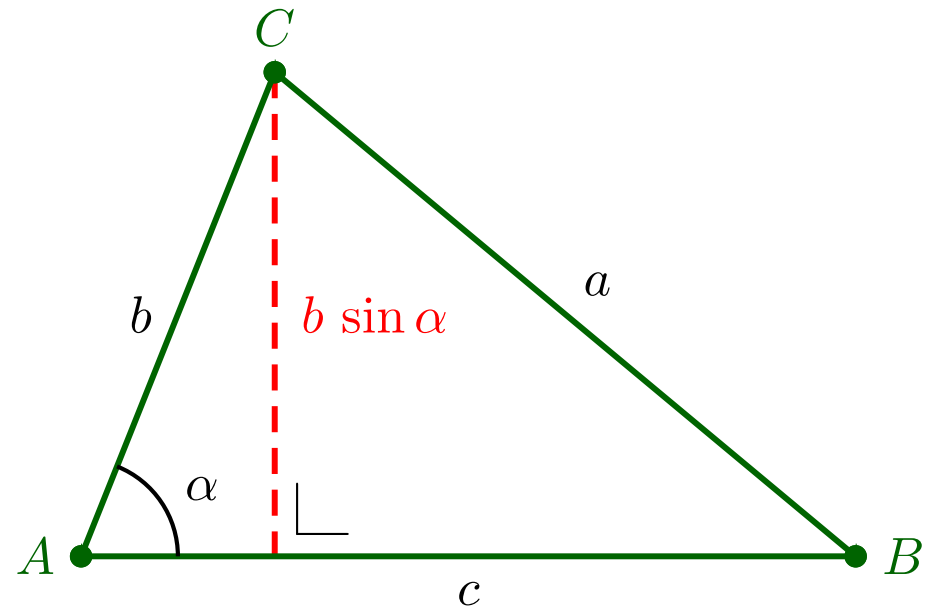
# Meetkunde - Eigenschappen van een driehoek

Som van de hoeken:  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Pythagoras:

$$\triangle ABC \text{ rechthoekig in } A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$\begin{aligned} \text{Opp. } \triangle ABC &= \frac{\text{basis} \times \text{hoogte}}{2} \\ &= \frac{c \cdot h}{2} \\ &= \frac{1}{2} c \cdot b \sin \alpha \end{aligned}$$



Sinusregel:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Cosinusregel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

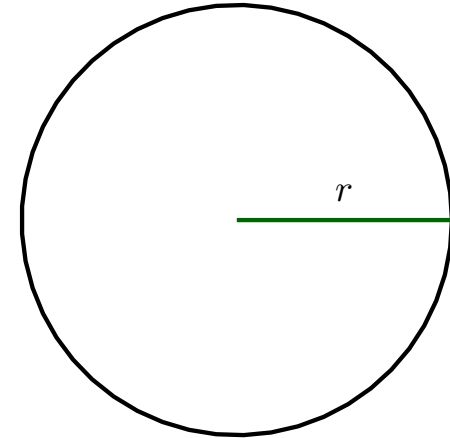
# Meetkunde - Eigenschappen van een cirkel

Cirkel met straal  $r$ :

$$\text{omtrek} = 2\pi r$$

$$\text{oppervlakte} = \pi r^2$$

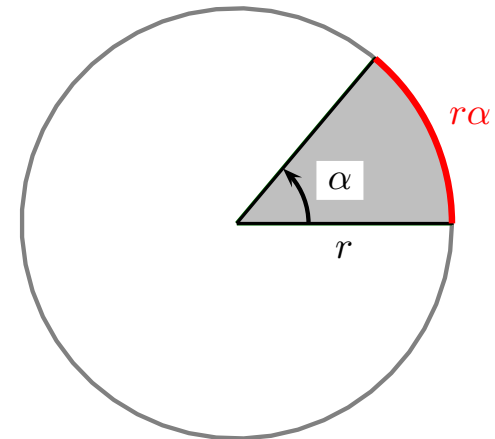
Als  $r = 1$ : omtrek  $2\pi$  rad hoort bij  $360^\circ$



Cirkelsector met straal  $r$  en hoek  $\alpha$  (rad):

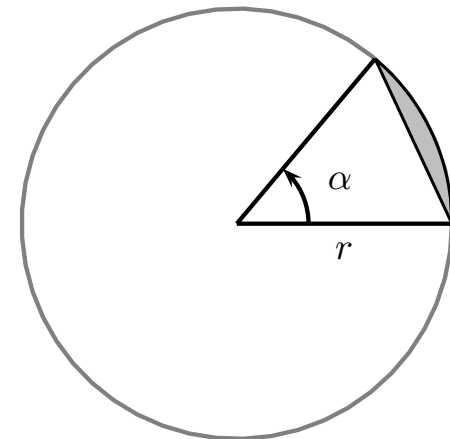
$$\text{booglengte} = r\alpha$$

$$\text{oppervlakte} = \frac{1}{2} r^2 \alpha$$



Cirkelsegment met straal  $r$  en hoek  $\alpha$ :

$$\text{oppervlakte} = \frac{1}{2} r^2 \alpha - \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha$$





# Meetkunde - Eigenschappen van een cirkel

## ► Voorbeeld 9

Bepaal de oppervlakte van deze cirkel met middelpunt  $A$  en waarbij  $\hat{B} = 15^\circ$ ,  $\hat{C} = 45^\circ$  en  $|BD| = 2$ .

*Oplossing*

Opp. =  $\pi r^2$  maar wat is  $r$ ?

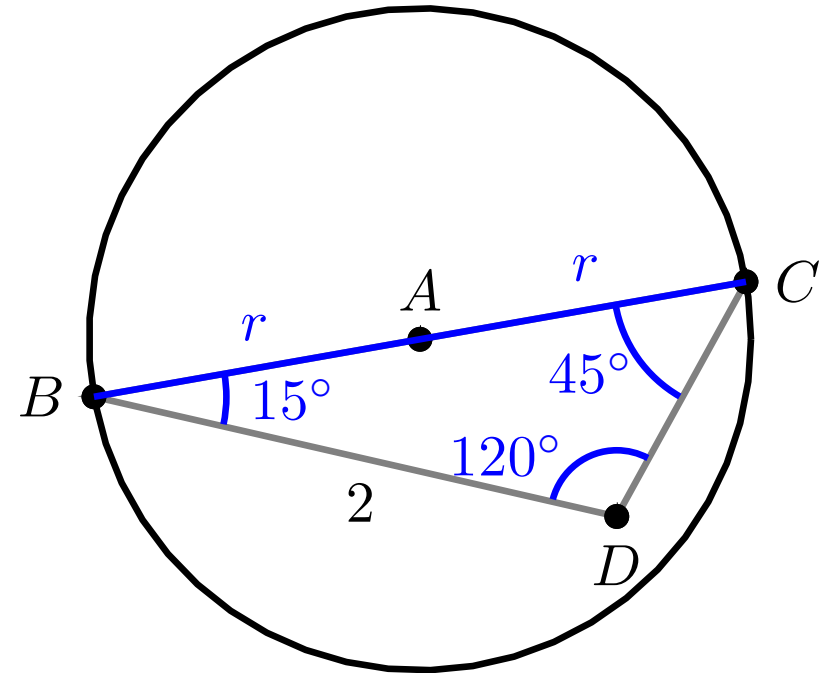
$$\text{Sinusregel: } \frac{2r}{\sin 120^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{2r}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{2}/2}$$

$$\Rightarrow \frac{4r}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{3}/\sqrt{2}$$

$$\text{Antwoord Opp.} = \pi \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{3\pi}{2}$$



# Meetkunde - Eigenschappen van een cirkel

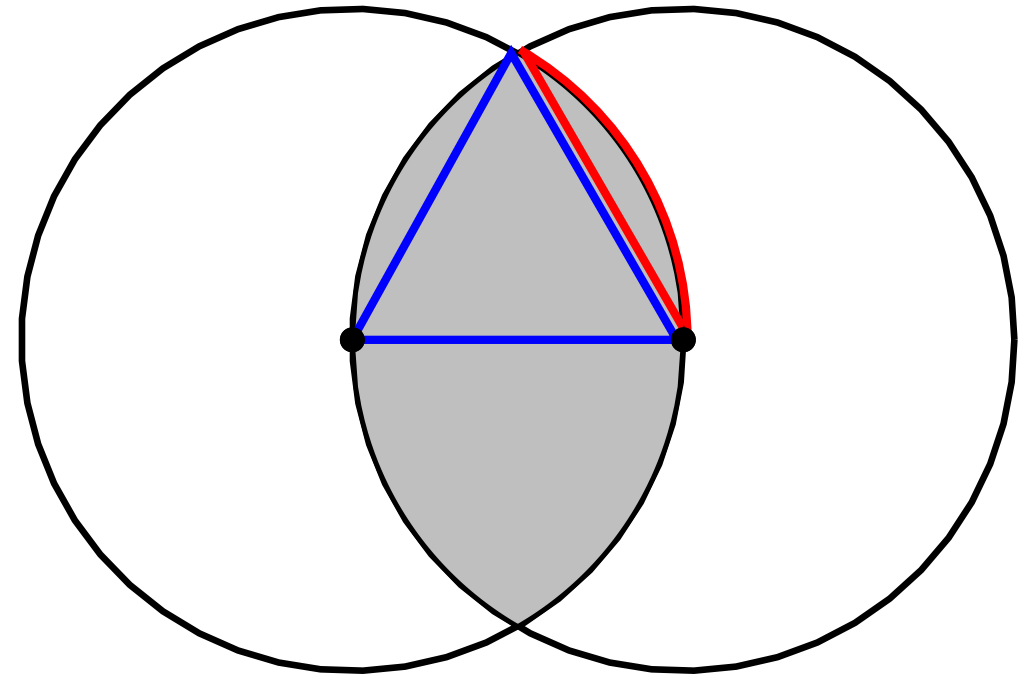
## ► Voorbeeld 10

Twee cirkels met straal 1 snijden elkaar doorheen elkaars middelpunten. Hoeveel bedraagt de gearceerde oppervlakte?

*Oplossing*

$$\begin{aligned}\text{Opp.}\blacksquare &= \frac{1}{2} bc \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Opp.}\blacksquare &= \frac{1}{2} r^2 \left( \alpha - \sin(\alpha) \right) \\ &= \frac{1}{2} 1^2 \left( \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\text{Opp.}\blacksquare &= 2 \cdot \text{Opp.}\blacksquare + 4 \cdot \text{Opp.}\blacksquare \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

# Meetkunde - Vergelijking van een rechte

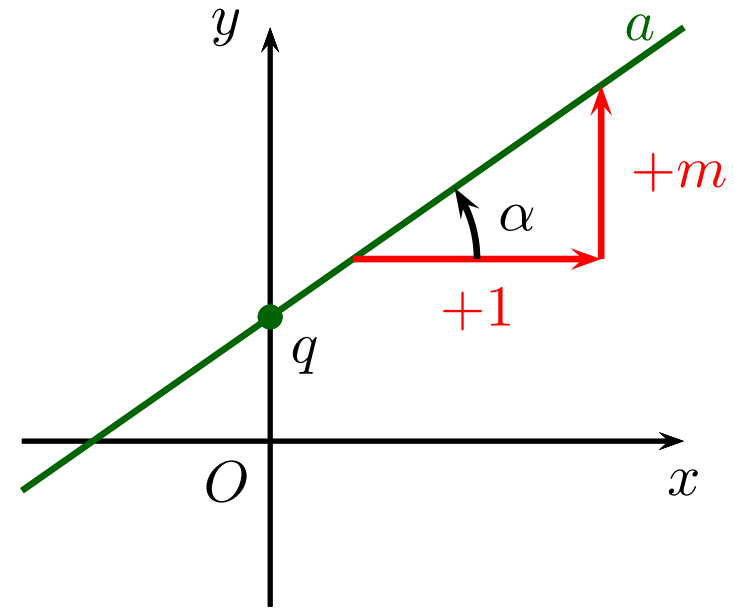
De vergelijking van een rechte

- ▶ NIET evenwijdig met de  $y$ -as is:

$$a : y = mx + q$$

rico rechte:  $m = \tan \alpha$

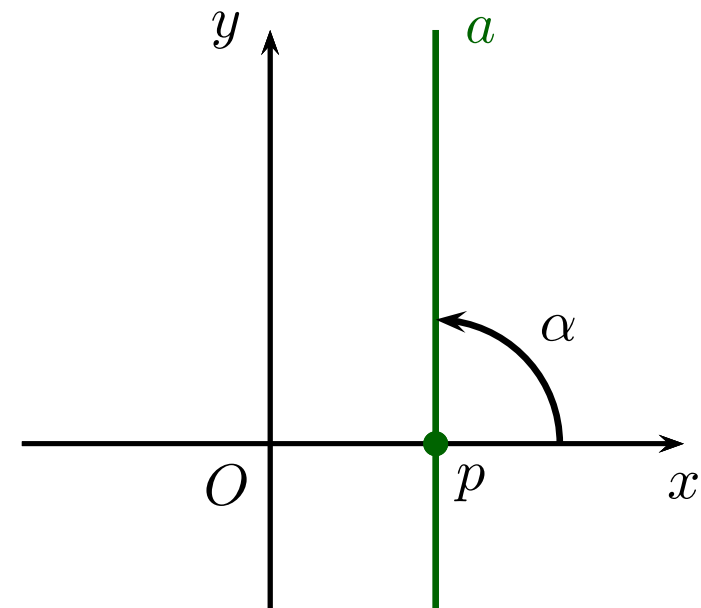
snijpunt  $y$ -as:  $S(0, q)$



- ▶ WEL evenwijdig met de  $y$ -as is:

$$a : x = p$$

rico rechte: bestaat niet  
hellingshoek  $\alpha = 90^\circ$



# Meetkunde - Vergelijking van een rechte

## ► Voorbeeld 1 (opnieuw)

Welke waarden  $x$  voldoen aan de ongelijkheid  $\left|x - \frac{5}{2}\right| < 2$

(A)  $x > \frac{1}{2}$

(C)  $x \in \left] \frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right[$

(B)  $x < \frac{1}{2}$

(D)  $x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[$

*Oplossing* Een ongelijkheid meetkundig oplossen?

(1) Schets linkerlid

$$y = x - \frac{5}{2}$$

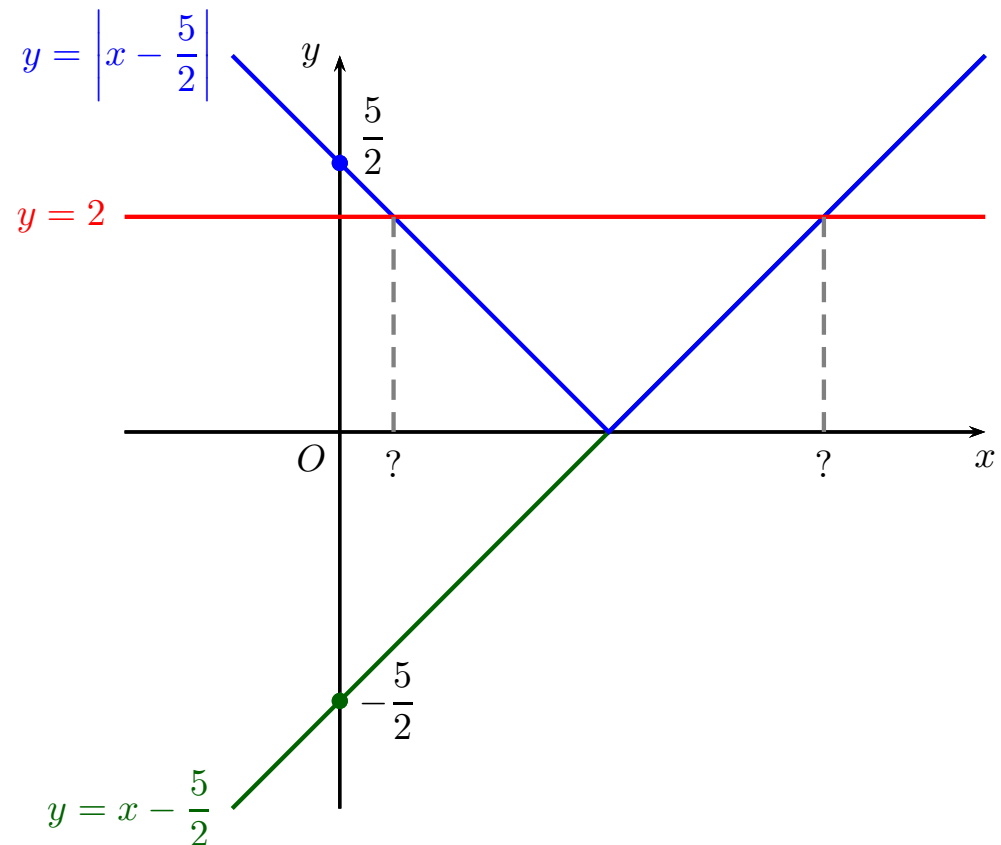
$$y = \left|x - \frac{5}{2}\right|$$

(2) Schets rechterlid

$$y = 2$$

(3) Lees snijpunten af

*Antwoord* (C)



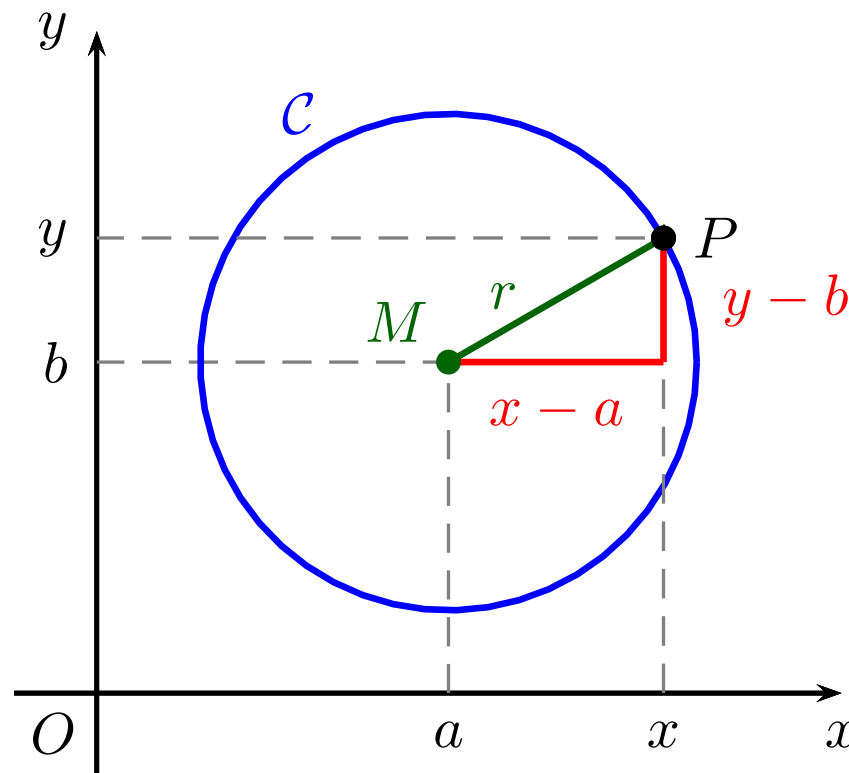
# Meetkunde - Vergelijking van een cirkel

met middelpunt  $M(a, b)$  en straal  $r$  is

$$\mathcal{C} : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Waarom?

$$\begin{aligned} P(x, y) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow |MP| = r \\ &\Leftrightarrow |MP|^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \text{Pythagoras} \end{aligned}$$



# Meetkunde - Vergelijking van een cirkel

- **Voorbeeld 11** Wat is de straal van de cirkel met vergelijking

$$4x^2 - 16x + 4y^2 + 20y - 283 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 + 5y - \frac{283}{4} = 0$$

*Oplossing* De vergelijking is van de vorm

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

zodat

$$\begin{cases} -4 = -2a \\ 5 = -2b \\ -\frac{283}{4} = a^2 + b^2 - r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{5}{2} \\ -\frac{283}{4} = 2^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - r^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow r^2 = 81$$

*Antwoord* De straal van de cirkel is **9**

# Meetkunde - Vergelijking van een parabool

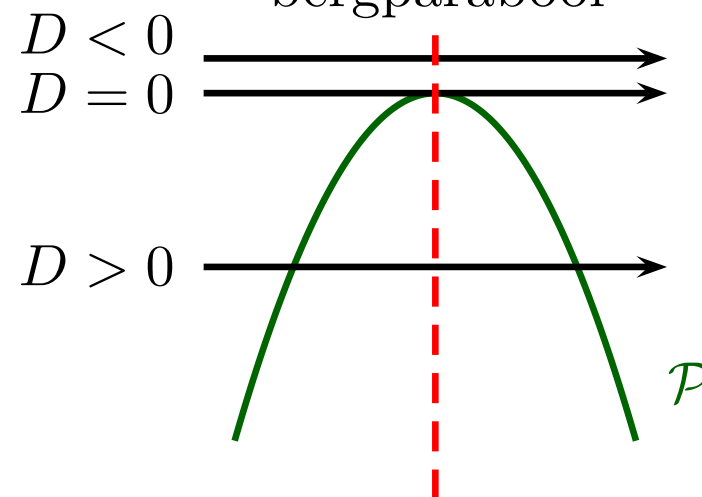
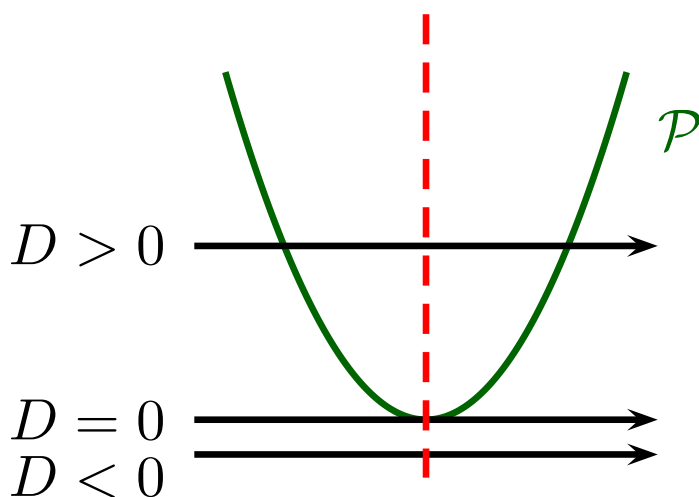
met symmetrie-as evenwijdig met  $y$ -as:

$$\mathcal{P} : y = ax^2 + bx + c$$

$a > 0$   
dalparabool

of

$a < 0$   
bergparabool



vergelijking symmetrie-as:  $x = -\frac{b}{2a}$ , top:  $T(x, f(x))$   
snijpunten  $x$ -as: dan is

$$y = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \left\{ \begin{array}{l} D > 0 : 2 \text{ snijpunten met } x\text{-as} \\ D = 0 : 1 \text{ snijpunt met } x\text{-as} \\ D < 0 : \text{ geen snijpunten met } x\text{-as} \end{array} \right.$$

# Meetkunde - Vergelijking van een parabool

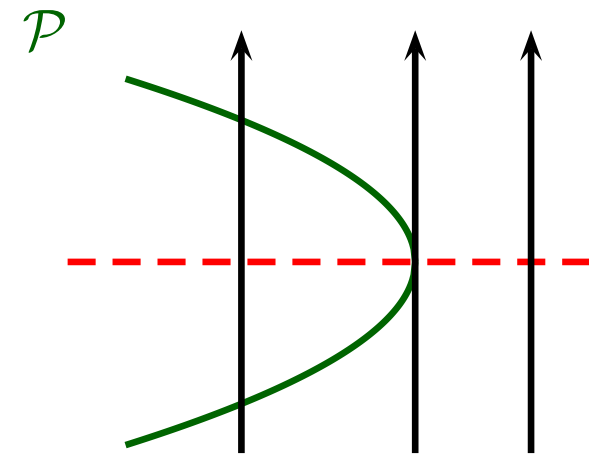
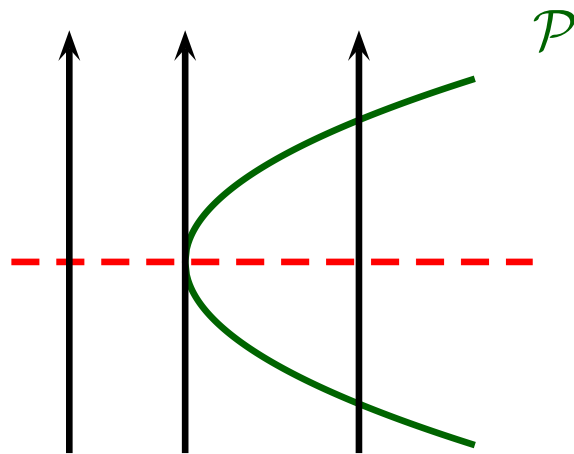
met symmetrie-as evenwijdig met x-as:

$$\mathcal{P} : x = ay^2 + by + c$$

$a > 0$

of

$a < 0$



$D < 0$   $D = 0$   $D > 0$

$D > 0$   $D = 0$   $D < 0$

vergelijking symmetrie-as:  $y = -\frac{b}{2a}$ , top:  $T(f(y), y)$   
 snijpunten y-as: dan is

$$x = 0 \Leftrightarrow ay^2 + by + c = 0 \quad \boxed{D = b^2 - 4ac}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \begin{cases} D > 0 : 2 \text{ snijpunten met y-as} \\ D = 0 : 1 \text{ snijpunt met y-as} \\ D < 0 : \text{geen snijpunten met y-as} \end{cases}$$



# Meetkunde - Vergelijking van een parabool

- ▶ **Voorbeeld 12** Na regressieanalyse van de waarnemingen was men in staat het percentage genezen mensen ( $A$ ) uit te drukken in functie van de toegediende dosis ( $d$ ) van een bepaald geneesmiddel:

$$A(d) = -d^2 + 2d + 3 \text{ met } 0 \leq d \leq 2.$$

Welke dosis van dit geneesmiddel is het meest effectief?

*Oplossing*

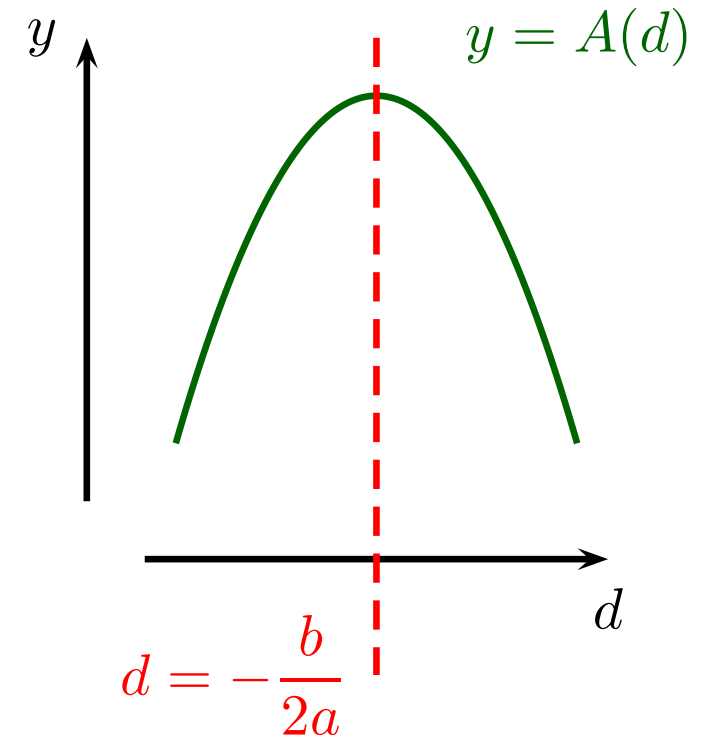
Gedaante  $y = ax^2 + bx + c$  met  $a < 0$

Gevraagd: dosis bij de top

Symmetrie-as:

$$d = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1$$

Antwoord  $d = 1$



# Meetkunde - Vergelijking van een parabool

- **Voorbeeld 13** We beschouwen de parabool met vergelijking  $x = y^2 - 3y - 2$ . Welke uitspraak klopt? De parabool

(A) raakt de  $y$ -as

(C) snijdt  $y$ -as niet

(B) snijdt  $y$ -as eens boven en onder de  $x$ -as

(D) snijdt  $y$ -as in twee punten boven de  $x$ -as

*Oplossing*

Snijpunten  $y$ -as: dan is

$$x = 0 \Leftrightarrow y^2 - 3y - 2 = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} D &= (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) \\ &= 17 \end{aligned}}$$

$$\Leftrightarrow y = \underbrace{\frac{3 + \sqrt{17}}{2}}_{>0} \text{ of } y = \underbrace{\frac{3 - \sqrt{17}}{2}}_{<0}$$

*Antwoord* (B)

# Meetkunde - Vergelijking van een parabool

► **Voorbeeld 14** We beschouwen de parabool met vergelijking  $x = y^2 - 3y - 2$ . Welke uitspraak klopt? De parabool

(A) raakt de  $y$ -as

(C) snijdt  $y$ -as niet

(B) snijdt  $y$ -as eens boven en onder de  $x$ -as

(D) snijdt  $y$ -as in twee punten boven de  $x$ -as

*Oplossing* ALTERNATIEF

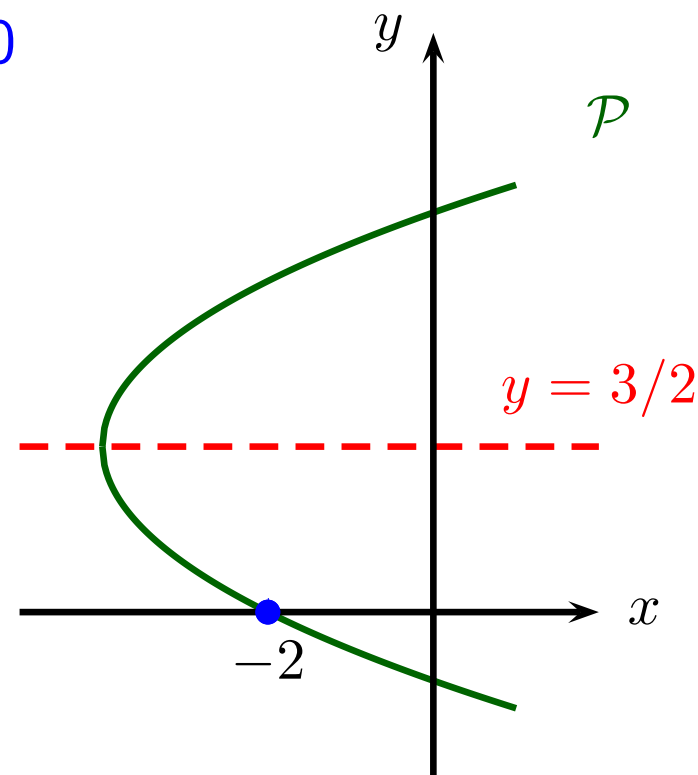
Gedaante  $x = ay^2 + by + c$  met  $a > 0$

Symmetrie-as:  $y = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$

Snijpunt  $x$ -as: dan is

$$y = 0 \Leftrightarrow x = 0^2 - 3 \cdot 0 - 2 \\ = -2$$

*Antwoord* (B)



# Meetkunde - Gemeenschappelijke punten

- **Voorbeeld 15** Hoeveel punten hebben de parabolen  $y = -3x^2 + x + 5$  en  $y = 2x^2 - 3x + 2$  gemeenschappelijk?

*Oplossing* Grafieken van  $y = f(x)$  en  $y = g(x)$  hebben

$P(x, y)$  gemeenschappelijk

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

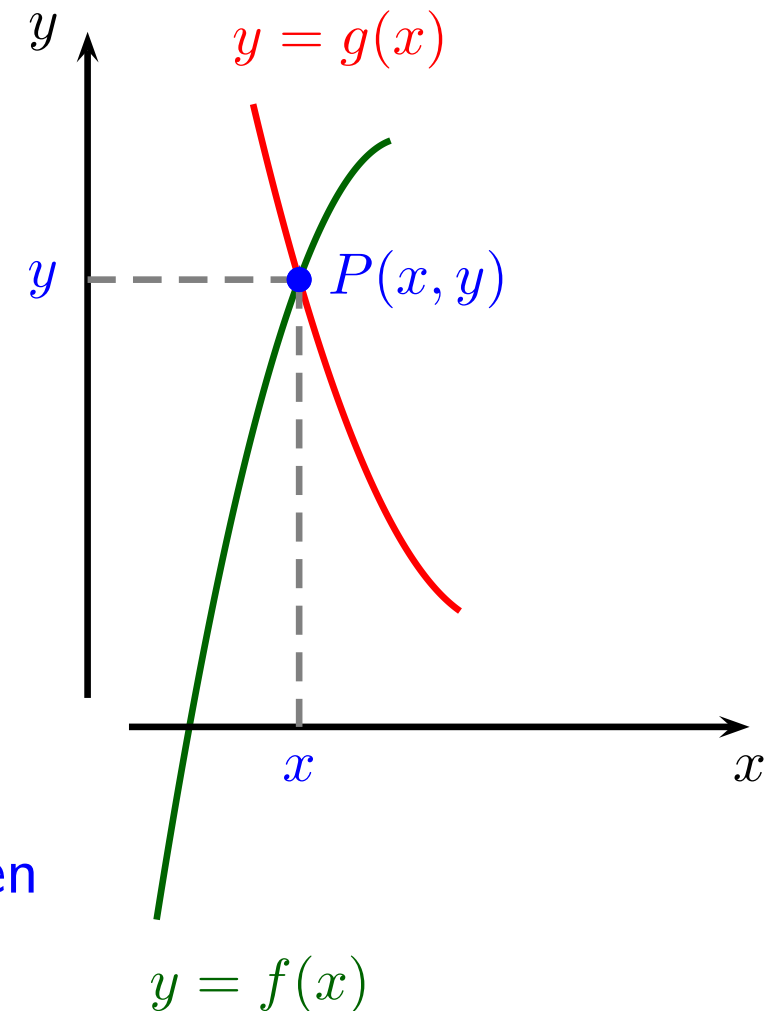
$$\Leftrightarrow -3x^2 + x + 5 = 2x^2 - 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow -5x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\boxed{D = 4^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 3 = 76 > 0}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{76}}{-10}$$

*Antwoord* **2** gemeenschappelijke punten



# Meetkunde - Gemeenschappelijke punten

## ► Voorbeeld 16

Een rechte  $a$  die de  $y$ -as snijdt in  $(0, 4)$  heeft één punt gemeenschappelijk met de parabool  $y = -2x^2 + 2$ . De rechte is niet verticaal en niet parallel met  $y = 4x$ . Wat is de helling van die rechte?

*Oplossing*

(1) rechte niet evenwijdig met  $y$ -as dus  $a : y = mx + q$

(2) rechte niet parallel met  $y = 4x$  dus  $m \neq 4$

(3) snijpunt  $y$ -as is  $(0, 4) = (0, q)$  dus  $q = 4$

(4) één punt gemeenschappelijk met parabool

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 2 = mx + 4 \text{ heeft één oplossing}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + mx + 2 = 0 \text{ heeft één oplossing}$$

$$\Leftrightarrow D = m^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 4 \text{ of } m = -4$$

*Antwoord* De helling is  $-4$

# Examenvragen

- **Juli 2016 - Vraag 8** Als  $\cos x = \sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}$ , dan is  $\cos^3 x - \sin^3 x$  gelijk aan

(A)  $\frac{4}{3\sqrt{3}}$

(C)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(B)  $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

(D)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

*Oplossing* Ontbinden in factoren:

$$\cos^3 x - \sin^3 x = \underbrace{(\cos x - \sin x)}_{1/\sqrt{3}} \left( \cos^2 x + \underbrace{\sin x \cos x}_{1/3} + \sin^2 x \right)$$

$$\underbrace{(\cos x - \sin x)^2}_{1/3} = \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x$$

$$\text{dus } 2 \sin x \cos x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \text{ dus antwoord (A).}$$

# Examenvragen

- **Augustus 2016 - Vraag 8** In een orthonormaal assenstelsel is een cirkel met middelpunt  $(0, 0)$  en straal 1 gegeven. Vanuit het punt  $A(-2, 0)$  tekenen we de raaklijn  $r$  aan de cirkel. Het punt  $B$  is het snijpunt van de (positieve)  $x$ -as met de raaklijn  $s$  aan de cirkel loodrecht op  $r$ . Wat is de coördinaat van  $B$ ?

(A)  $\left(\frac{5\sqrt{3}}{6}, 0\right)$       (C)  $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, 0\right)$

(B)  $\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}, 0\right)$       (D)  $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$

*Oplossing* Raaklijn  $\perp$  middellijn

Gelijkvormige driehoeken:

$$\frac{?}{2} = \frac{1}{a} \Rightarrow ? = \frac{2}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{(D)}$$

Pythagoras:

$$2^2 = a^2 + 1^2 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

