Uitgewerkte oefeningen

Telproblemen

Oefening 1 Een beveiligingscode bestaat uit 3 karakters, die elk een cijfer of een letter kunnen zijn. Bijvoorbeeld $C13$ of $2D9$. Hoeveel zulke codes zijn er?

(A) 17 576 000

(B) 46 656

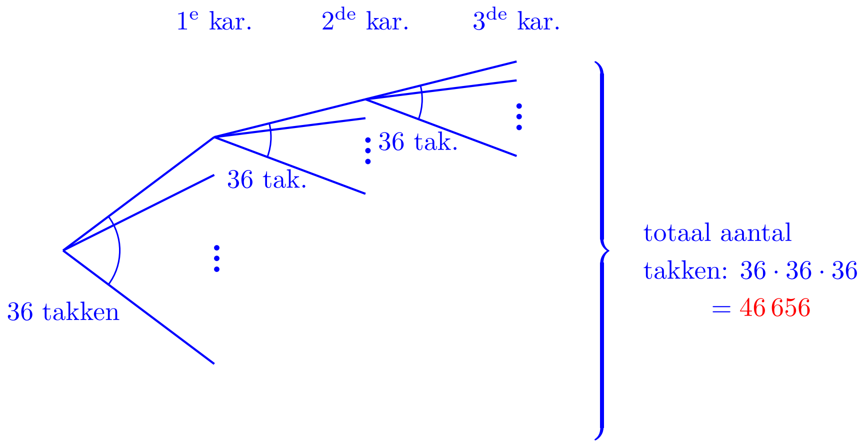
(C) 2600

(D) 108

Oplossing Schrijf een voorbeeld op:

1^{e}	2^{de}	3^{de}
C	1	3

Er zijn 10 cijfers $(0, 1, \ldots, 9)$ en 26 letters $(A, B, \ldots, Z)$. Voor elk karakter zijn er dus $10+26 = 36$ mogelijkheden. De volgorde van de karakters is belangrijk, dus we tellen het aantal mogelijkeden met een boomdiagram met herhaling:

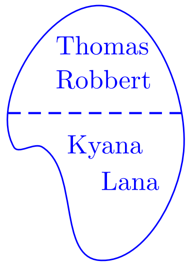


Antwoord B

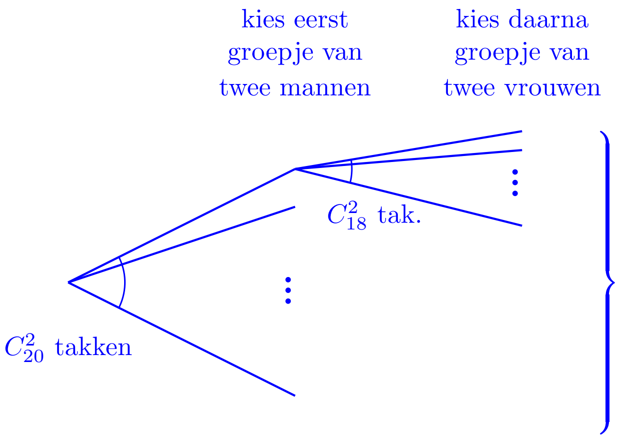
Oefening 2 Om een nieuw geneesmiddel te testen moet men uit een groep van 38 proefpersonen (20 mannen en 18 vrouwen) twee mannen en twee vrouwen kiezen. Op hoeveel manieren kan dit gebeuren?

(A) 686
(B) 343
(C) 116 280
(D) 73 815
(E) 29 070

Oplossing Schrijf een voorbeeld op:



Hoe maken we zo'n groep?



totaal aantal takken: $C_{20}^2 \cdot C_{18}^2$

$$= \frac{20!}{2!\,18!} \cdot \frac{18!}{2!\,16!}$$

$$= \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot \frac{18 \cdot 17}{2} = 29\,070$$

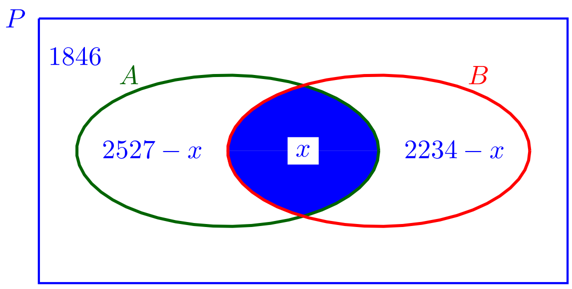
Antwoord E

Oefening 3 In een studie naar ABO bloedgroepen werden 6000 mensen getest. Bij 1846 werd noch antigen A noch antigen B gevonden; 2527 personen waren positief voor antigen A; 2234 personen waren positief voor antigen B. Hoeveel personen waren positief voor beide antigenen?

(A) 1,0%
(B) 5,0%
(C) 7,5%
(D) 10,0%

Oplossing

Noem x het aantal personen (P) dat positief is voor antigen A en positief is voor antigen B.



In het totaal zijn er 6000 mensen, zodat:

$$6000 = (2527 - x) + x + (2234 - x) + 1846 \quad \text{dus} \quad x = 607.$$

Op die manier zijn er $607/6000 \approx 600/6000 \approx 10\%$ mensen positief voor beide antigenen.

Antwoord D

Oefening 4 In een urne zitten 12 genummerde ballen, 4 rode en 8 witte. Hoeveel mogelijke trekkingen van 5 ballen uit de urne (zonder teruglegging) zijn er waarbij er 2 rode en 3 witte ballen moeten zijn?

(A) 62

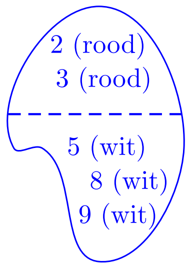
(B) 336

(C) 4032

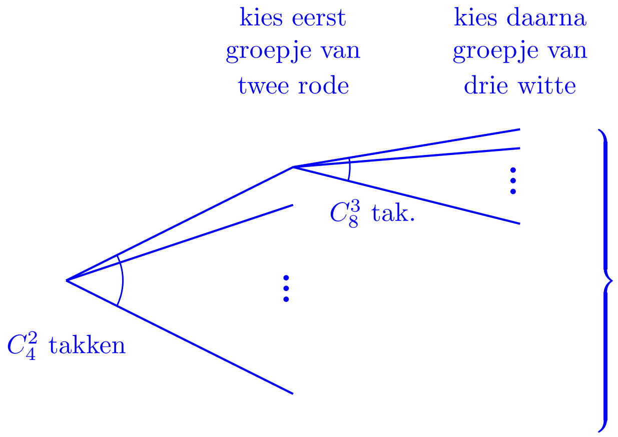
(D) 348

(E) 792

Oplossing Schrijf een voorbeeld op:



Hoe maken we zo'n groep?



totaal aantal takken: $C_4^2 \cdot C_8^3$

$$= \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{8!}{3!\,5!}$$

$$= \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} = 336$$

Antwoord B

Oefening 5 Er zijn 10 kandidaten voor de vorming van een comité, drie daarvan zijn artsen. Het comité bestaat uit exact 5 personen waarvan minstens één arts. Hoeveel verschillende comités kunnen gevormd worden die aan deze voorwaarden voldoen?

(A) 27 720

(B) 9072

(C) 231

(D) 252

Oplossing Het aantal comités met minstens één arts is precies gelijk aan het totaal aantal comités verminderd met het aantal comités met geen enkele arts.

- Totaal aantal comités: $C_{10}^5 = \frac{10!}{5!\,5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 = 252$
- Aantal comités met geen enkele arts: $C_7^5 = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$

Het aantal comités met minstens één arts is dus gelijk aan $252 - 21 = 231$.

Antwoord C

Oefening 6 Hoeveel annagrammen heeft het woord “negen”? Dit zijn woorden, die niet hoeven te bestaan, met exact dezelfde letters, alleen eventueel in een andere volgorde. Bijvoorbeeld “ngene”, “geenn”, ...

(A) 9

(B) 120

(C) 30

(D) 60

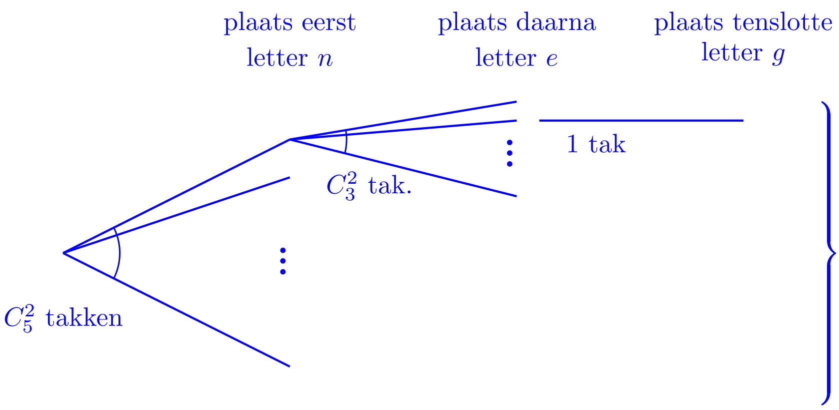
Oplossing Schrijf een voorbeeld op:

1^{e}	2^{de}	3^{de}	4^{de}	5^{de}
n	g	e	n	e

Sommige letters worden herhaald, andere letters worden niet herhaald. Daarom kunnen we niet meteen aan de slag met een boomdiagram en moeten we op een andere manier tellen.

- Eerst plaatsen we tweemaal de letter n. Daarvoor zijn er vijf mogelijke plaatsen, bijvoorbeeld de 1^{e} en de 4^{de} plaats. Dus om tweemaal de letter n te plaatsen moeten we een groepje kiezen van twee plaatsen uit de vijf. Daarvoor hebben we C_5^2 mogelijkheden.
- Daarna plaatsen we tweemaal de letter e. Maar twee van de vijf plaatsen zijn al bezet door de letter n. Dus voor het plaatsen van de letter e hebben we nog drie mogelijke plaatsen, bijvoorbeeld de 3^{de} en de 5^{de} plaats. Dus om tweemaal de letter e te plaatsen moeten we een groepje kiezen van twee plaatsen uit de drie. Daarvoor hebben we C_3^2 mogelijkheden.
- Tenslotte plaatsen we de letter g. Maar vier van de vijf plaatsen zijn al bezet door de letters n en e. Dus voor het plaatsen van de letter g hebben we nog één mogelijke plaats, bijvoorbeeld de 2^{de} plaats. Dus om eenmaal de letter g te plaatsen moeten we één plaats uit de één. Daarvoor hebben we 1 mogelijkheid.

Nu kunnen we het aantal mogelijkheden toch tellen met een boomdiagram:



totaal aantal takken: $C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot 1$

$$= \frac{5!}{2!\,3!} \cdot \frac{3!}{2!\,1!}$$

$$= \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 3 = 30$$

Antwoord C

Oefening 7 In de wachtzaal van een huisarts zitten 7 personen, waarvan 4 vrouwen en 3 mannen. Ze weten niet wie aan de beurt is. Op hoeveel verschillende manieren kunnen ze bij de dokter binnen gaan als je weet dat er geen twee personen van hetzelfde geslacht na elkaar binnen mogen?

(A) 144

(B) 70

(C) 35

(D) 30

Oplossing Kijken we enkel naar het geslacht, dan is er slechts één manier waarbij de personen naar binnen kunnen gaan (M staat voor man, V staat voor vrouw):

1^{e}	2^{de}	3^{de}	4^{de}	5^{de}	6^{de}	7^{de}
V	M	V	M	V	M	V

- Eerst plaatsen we de mannen, bijvoorbeeld

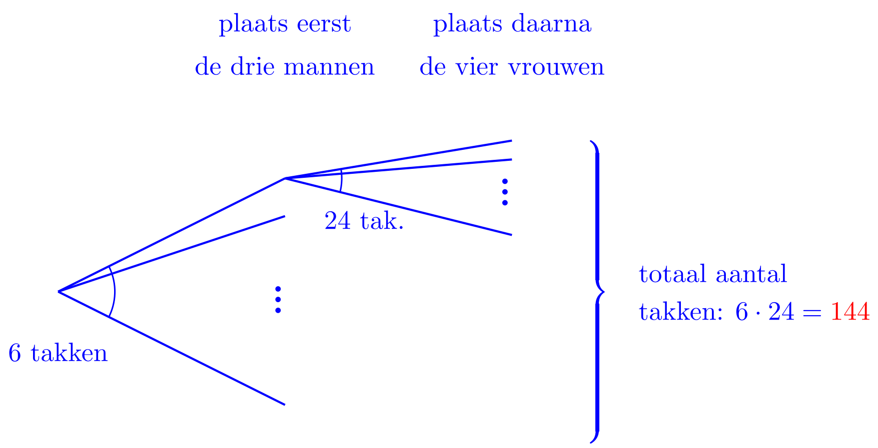
1^{e}	2^{de}	3^{de}	4^{de}	5^{de}	6^{de}	7^{de}
	Miguel		Alain		Niels	

  Tellen we dit aantal mogelijkheden met een boomdiagram, dan verkrijgen we $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
- Daarna plaatsen we de vrouwen, bijvoorbeeld

1^{e}	2^{de}	3^{de}	4^{de}	5^{de}	6^{de}	7^{de}
Karen		Kristel		Kathleen		Josje

  Tellen we dit aantal mogelijkheden met een boomdiagram, dan verkrijgen we $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Nu kunnen we het totaal aantal mogelijkheden tellen met een boomdiagram:



Antwoord A

Oefening 8 Op een feestje schudt iedereen de hand van iedere andere aanwezige. Niemand begroet tweemaal dezelfde persoon. Er worden in totaal 210 handen geschud. Hoeveel mensen waren er op dat feestje?

(A) 14
(B) 15
(C) 20
(D) 21
(E) 105

Oplossing Schrijf een voorbeeld op:

Noemen we n het aantal personen, dan zijn er C_n^2 groepen, zodat:

$$\begin{aligned} C_n^2 = 210 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n \cdot (n-1)}{2} = 210 \\ &\Leftrightarrow \quad n^2 - n - 420 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1681}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad n = 21 \quad \text{ of } \quad n = -20. \end{aligned}$$

Antwoord D

Oefening 9 Je hebt 8 mannen en 10 vrouwen. Je wil een jury vormen van 12 leden. Maar je wil in de jury wel meer mannen dan vrouwen hebben. Hoeveel unieke combinaties kan je vormen?

(A) ongeveer 2200
(B) ongeveer 2600
(C) ongeveer 3600
(D) ongeveer 5000

Oplossing Om een jury te hebben met meer mannen dan vrouwen, dan zijn de volgende combinaties mogelijk.

- 7 mannen en 5 vrouwen, of
- 8 mannen en 4 vrouwen.

In het eerste geval zijn er $C_8^7 \cdot C_{10}^5$ mogelijkheden, uitgewerkt:

$$C_8^7 \cdot C_{10}^5 = \frac{8!}{7!\,1!} \cdot \frac{10!}{5!\,5!} = 8 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 = 2016.$$

In het tweede geval zijn er $C_8^8 \cdot C_{10}^4$ mogelijkheden, uitgewerkt:

$$C_8^8 \cdot C_{10}^4 = \frac{8!}{8!\,1!} \cdot \frac{10!}{4!\,6!} = 1 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210.$$

Samen zijn er dus $2016 + 210 = 2226 \approx 2200$ mogelijkheden.
Antwoord A

Oefening 10 Op hoeveel manieren kunnen we 7 rode ballen en 5 witte ballen verdelen over 3 personen als de eerste persoon niet meer dan 5 ballen krijgt maar wel zeker 2 rode en 1 witte bal krijgt, de tweede persoon zeker 1 rode en 2 witte ballen en de derde persoon zeker 2 rode ballen?

(A) 10
(B) 31
(C) 35
(D) 36

Oplossing We maken gevalsonderscheid naargelang het aantal ballen dat de eerste persoon bij krijgt. We schrijven R voor een rode bal en W voor een witte bal.

Geval 1 Eerste persoon krijgt niets bij. Dan moeten er nog $2R$ en $2W$ verdeeld worden.

Tweede persoon kan krijgen: $0 - 1R - 1W - 2R - 2W - 1R1W - 2R1W - 1R2W - 2R2W$

We tellen 9 **mogelijkheden**.

Geval 2 Eerste persoon krijgt $1R$ bij. Dan moeten er nog $1R$ en $2W$ verdeeld worden.

Tweede persoon kan krijgen: $0 - 1R - 1W - 2W - 1R1W - 1R2W$

We tellen 6 **mogelijkheden**.

Geval 3 Eerste persoon krijgt $1W$ bij. Dan moeten er nog $2R$ en $1W$ verdeeld worden.

Tweede persoon kan krijgen: $0 - 1R - 1W - 2R - 1R1W - 2R1W$

We tellen 6 **mogelijkheden**.

Geval 4 Eerste persoon krijgt $2R$ bij. Dan moeten er nog $2W$ verdeeld worden.

Tweede persoon kan krijgen: $0 - 1W - 2W$

We tellen 3 **mogelijkheden**.

Geval 5 Eerste persoon krijgt $2W$ bij. Dan moeten er nog $2R$ verdeeld worden.

Tweede persoon kan krijgen: $0 - 1R - 2R$

We tellen 3 **mogelijkheden**.

Geval 6 Eerste persoon krijgt $1W$ en $1R$ bij. Dan moeten er nog $1R$ en $1W$ verdeeld worden.

Tweede persoon kan krijgen: $0 - 1R - 1W - 1R1W$

We tellen 4 **mogelijkheden**.

In totaal zijn er dus 31 mogelijkheden.

Antwoord B

Kansrekenen

Oefening 11 De kans dat iemand aan Alzheimer lijdt hangt af van zijn leeftijd en geslacht. Voor mannen van 75 tot 79 jaar is deze kans 5%, voor vrouwen van 80 tot 84 jaar is dit 8% en voor mannen van meer dan 85 jaar is de kans 35%. Stel dat we drie, onderling niet verwante, personen selecteren: een man van 77 jaar, een vrouw van 82 jaar en een man van 89 jaar. De kans dat minstens één van de drie aan Alzheimer lijdt, is

(A) $0,5681$

(B) $0,48$

(C) $0,4319$

(D) $0,52$

(E) $0,86$

Oplossing De kans dat de tweede persoon aan Alzheimer lijdt hangt niet af van de kans dat de eerste persoon aan Alzheimer lijdt. Daarom berekenen we de gevraagde kans met behulp van kanswetten. We tonen twee manieren om deze oefening op te lossen.

Eerste manier met behulp van de (veralgemeende) wet van Boole:

$$
\begin{aligned}
& P(\text{minstens één van de drie lijdt aan Alzheimer}) \\
&= P(\text{man 1 Alzh. of vrouw Alzh. of man 2 Alzh.}) \\
&= P(M_1 \cup V \cup M_2) \\
&= P(M_1) + P(V) + M(M_2) - P(M_1 \cap V) - P(M_1 \cap M_2) - P(V \cap M_2) + P(M_1 \cap V \cap M_2) \\
& \hfill \text{(wet van Boole)} \\
&= P(M_1) + P(V) + M(M_2) - P(M_1) \cdot P(V) - P(M_1) \cdot P(M_2) - P(V) \cdot P(M_2) + P(M_1) \cdot P(V) \cdot P(M_2) \\
& \hfill \text{(productregel)} \\
&= \frac{5}{100} + \frac{8}{100} + \frac{35}{100} - \frac{5}{100} \cdot \frac{8}{100} - \frac{8}{100} \cdot \frac{35}{100} - \frac{8}{100} \cdot \frac{35}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{8}{100} \cdot \frac{35}{100} \\
&= 48\% - 4,95\% + 0,14\% \\
&= 43,19\%
\end{aligned}
$$

Tweede manier met de complementenregel:

$$
\begin{aligned}
& P(\text{minstens één van de drie lijdt aan Alzheimer}) \\
&= P(\overline{\text{geen van de drie leidt aan Alzheimer}}) \\
&= 1 - P(\text{geen van de drie leidt aan Alzheimer}) && \text{(complementenregel)} \\
&= 1 - P(\text{man 1 geen Alzh. en vrouw geen Alzh. en man 2 geen Alzh.}) \\
&= 1 - P(\overline{M_1} \cap \overline{V} \cap \overline{M_2}) \\
&= 1 - P(\overline{M_1}) \cdot P(\overline{V}) \cdot P(\overline{M_2}) && \text{(productregel)} \\
&= 1 - \frac{95}{100} \cdot \frac{92}{100} \cdot \frac{65}{100} \\
&= 1 - \frac{568\,100}{1\,000\,000} \\
&= 100\% - 56,81\% \\
&= 43,19\%
\end{aligned}
$$

Antwoord C

Oefening 12 In de wachtzaal zitten 10 mensen, waarvan er 6 besmet zijn met het griepvirus. Wat is de kans dat als de dokter er willekeurig twee mensen uit neemt, dat ze allebei besmet zijn?

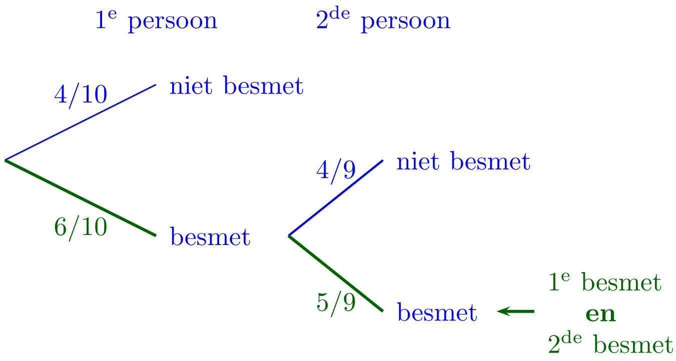
(A) 1/5

(B) 2/5

(C) 1/3

(D) 2/3

Oplossing De kans dat de tweede persoon besmet is hangt af van de kans dat de eerste persoon besmet is. Daarom berekenen we de gevraagde kans met behulp van een kansboom:



zodat $P(1^{\text{e}} \text{ besmet en } 2^{\text{de}} \text{ besmet}) = \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{5}{9} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$.

Antwoord C

Oefening 13 Veronderstel dat bij een geboorte de kans op een meisje 50% is. Een gezin heeft vijf kinderen. Wat is de kans dat er minstens één meisje bij is?

(A) 1/32

(B) 5/32

(C) 31/32

(D) 27/32

(E) 1/5

Oplossing De kans dat het tweede kind een meisje is hangt niet af van de kans dat het eerste kind een meisje is. Daarom berekenen we de gevraagde kans met behulp van kanswetten.

$$\begin{aligned}
& P(\text{minstens één meisje}) \\
&= P(\overline{\text{geen enkel meisje}}) \\
&= 1 - P(\text{geen enkel meisje}) && \text{(complementenregel)} \\
&= 1 - P(1^{\text{e}} \text{ is jongen en } 2^{\text{de}} \text{ is jongen en } 3^{\text{de}} \text{ is jongen en } 4^{\text{de}} \text{ is jongen en } 1^{\text{de}} \text{ is jongen}) \\
&= 1 - P(1^{\text{e}} \text{ is jongen}) \cdot P(2^{\text{de}} \text{ is jongen}) \cdot P(3^{\text{de}} \text{ is jongen}) \cdot P(4^{\text{de}} \text{ is jongen}) \cdot P(5^{\text{de}} \text{ is jongen}) && \text{(productregel)} \\
&= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
&= 1 - \frac{1}{32} \\
&= \frac{31}{32}
\end{aligned}$$

Antwoord C

Oefening 14 In een medisch onderzoek wordt de betrouwbaarheid van een allergie-test bestudeerd. De resultaten zijn:

- 6% van de proefpersonen test positief;
- 2% van de proefpersonen test positief, maar is niet allergisch;
- 1% van de proefpersonen test negatief, maar is toch allergisch.

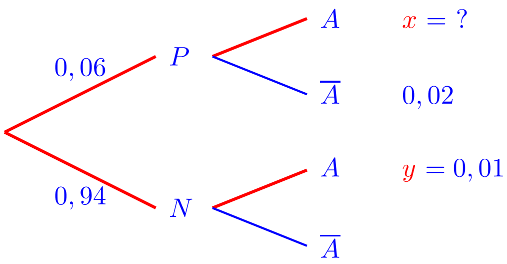
Wat is de kans dat een willekeurige persoon allergisch is?

(A) 4%
(B) 5%
(C) 6%
(D) 7%

Oplossing Voor een proefpersoon noteren we met:

P de persoon test positief,
N de persoon test negatief,
A de persoon is allergisch.

We brengen de gegevens aan in een kansboom:



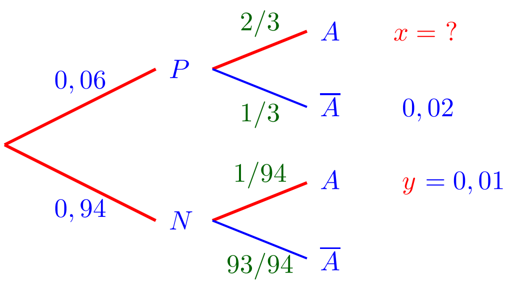
Gevraagd is de kans:

$$P(A) = P(P \cap A) + P(N \cap A) = x + y.$$

Uit de kanswet *kans op doorsnede* volgt:

$$P(\overline{A} \mid P) = \frac{P(P \cap \overline{A})}{P(P)} = \frac{0,02}{0,06} = \frac{1}{3} \quad \text{en} \quad P(A \mid N) = \frac{P(N \cap A)}{P(N)} = \frac{0,01}{0,94} = \frac{1}{94}$$

zodat we de kansboom verder kunnen aanvullen:



Op die manier is

$$P(A) = P(P \cap A) + P(N \cap A) = 0,06 \cdot \frac{2}{3} + 0,01 = 0,04 + 0,01 = 0,05.$$

Antwoord B

Oefening 15 Beschouw metingen voor de diastolische bloeddruk (DBD) bij moeders en hun eerstgeboren kinderen. De kans dat voor een willekeurige moeder in de doelgroep de DBD ≥ 95, is $1/10$. De kans dat voor een willekeurige eerstgeborene uit de doelgroep DBD ≥ 80, is $1/5$. Verder is de kans dat een willekeurige moeder en haar kind beide een te hoge diastolische bloeddruk hebben (voor de moeder DBD ≥ 95 en voor het kind DBD ≥ 80) is $1/20$. Dan is de kans dat voor een eerstgeboren kind DBD ≥ 80 indien de moeder DBD < 95 gelijk aan

(A) 1/6

(B) 1/9

(C) 2/9

(D) 3/10

Oplossing Voor een meting noteren we met

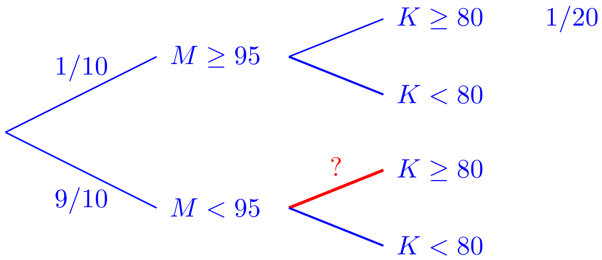
$M \geq 95$ de moeder heeft DBD ≥ 95,

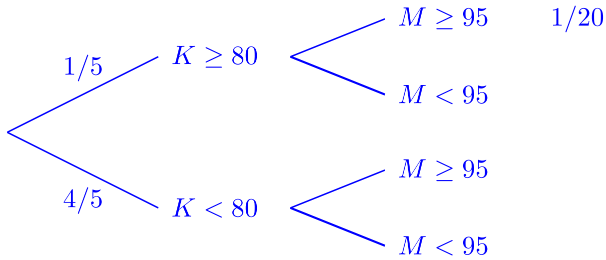
$M < 95$ de moeder heeft DBD < 95,

$K \geq 80$ het kind heeft DBD ≥ 80,

$K < 80$ het kind heeft DBD < 80.

We brengen de gegevens aan in twee kansbomen:

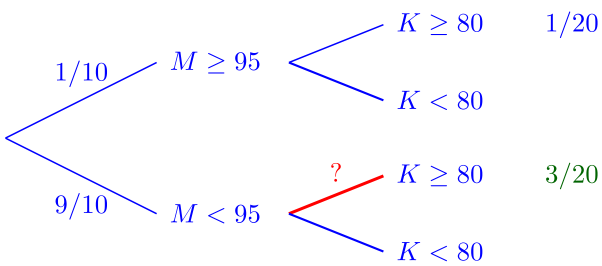


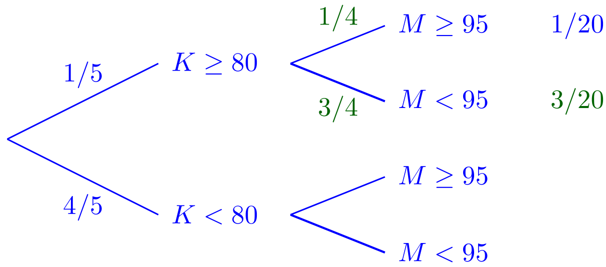


Gevraagd is de kans $P(K \geq 80 \mid M < 95)$. Uit de kanswet *kans op doorsnede* volgt

$$P(M \geq 95 \mid K \geq 80) = \frac{P((M \geq 95) \cap (K \geq 80))}{P(K \geq 80)} = \frac{1/20}{1/5} = \frac{1}{4}$$

zodat we de kansbomen verder kunnen aanvullen:





Opnieuw toepassen van de kanswet *kans op doorsnede* geeft dan het gevraagde:

$$P(K \geq 80 \mid M < 95) = \frac{P((K \geq 80) \cap (M < 95))}{P(M < 95)} = \frac{3/20}{9/10} = \frac{30}{180} = \frac{1}{6}$$

Antwoord A

Oefening 16 In de wachtzaal van een dokter zitten er 8 personen, waarvan 4 vrouwen en 4 mannen. Alle personen komen willekeurig aan de beurt voor een consultatie. Wat is de kans dat de eerste persoon die aan de beurt is een vrouw is en dat ook de laatste persoon die aan de beurt is een vrouw is?

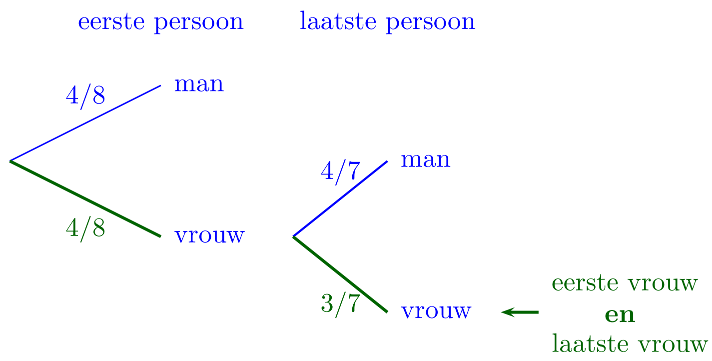
(A) 3/14

(B) 1/14

(C) 3/28

(D) 3/16

Oplossing De kans dat de laatste persoon een vrouw is hangt af van de kans dat de eerste persoon een vrouw is. Daarom berekenen we de gevraagde kans met behulp van een kansboom:



zodat $P(\text{eerste vrouw en laatste vrouw}) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$.

Antwoord A

Oefening 17 Twee vrouwen en drie mannen gaan willekeurig naast elkaar zitten aan een ronde tafel. Wat is de kans dat de twee vrouwen naast elkaar zitten?

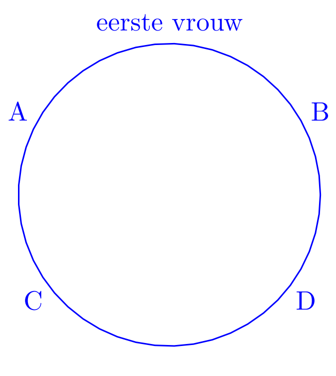
(A) 20%

(B) 30%

(C) 40%

(D) 50%

Oplossing We plaatsen de eerste vrouw op een willekeurige positie aan tafel. Daarna draaien we het geheel tot die vrouw zich aan de noordkant van de tafel bevindt. Er blijven nog vier plaatsen A, B, C, D over.



Voor de tweede vrouw zijn nu twee van de vier plaatsen aan tafel gunstig, namelijk plaatsen A en B. De kans dat de twee vrouwen naast elkaar zitten is dus $2/4 = 50\%$.

Antwoord D

Oefening 18 Hieronder staan resultaten van een onderzoek over het verband tussen roken en longkanker.

- De bevolking is onderverdeeld in 85% niet-rokers en 15% rokers.
- 86% procent van de mensen krijgt nooit longkanker.
- 60% van de rokers krijgt nooit longkanker.

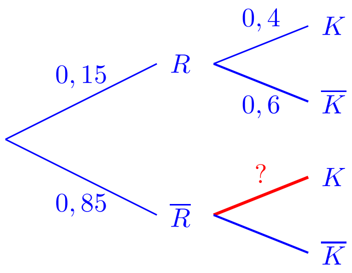
Hoe groot is de kans dat een niet-roker longkanker krijgt?

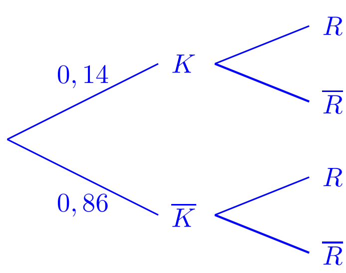
(A) 4/100
(B) 8/85
(C) 9/100
(D) 9/85

Oplossing Voor een persoon noteren we met

R de persoon is een roker,
K de persoon krijgt longkanker.

We brengen de gegevens aan in twee kansbomen:

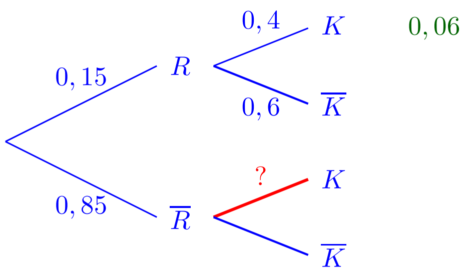


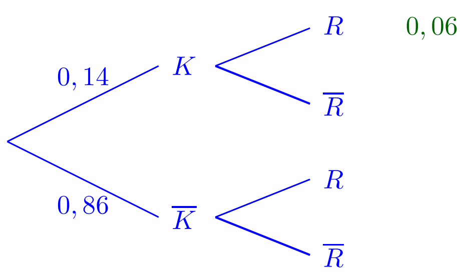


Gevraagd is de kans $P(K \mid \overline{R})$. Uit de kanswet *kans op doorsnede* volgt:

$$P(R \cap K) = P(R) \cdot P(K \mid R) = 0,15 \cdot 0,4 = 0,06$$

zodat we de kansbomen verder kunnen aanvullen:

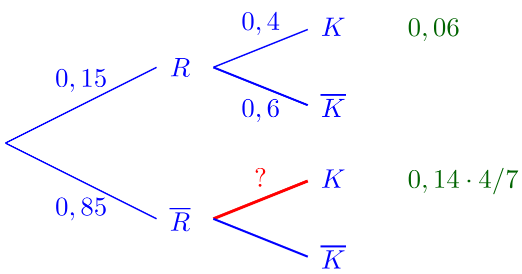


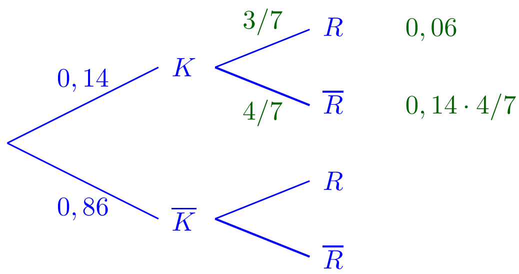


Uit de kanswet *kans op doorsnede* volgt dan:

$$P(R \mid K) = \frac{P(R \cap K)}{P(K)} = \frac{0,06}{0,14} = \frac{3}{7}$$

zodat we de kansbomen nog verder kunnen aanvullen:





Opnieuw toepassen van de kanswet *kans op doorsnede* geeft dan het gevraagde:

$$P(K \mid \overline{R}) = \frac{P(\overline{R} \cap K)}{P(\overline{R})} = \frac{0,14 \cdot 4/7}{0,85} = \frac{7}{50} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{100}{85} = \frac{8}{85}.$$

Antwoord B

Oefening 19 Er zijn 51 leerlingen, verdeeld over twee klassen. In klas A zitten twee keer zo veel leerlingen als in klas B. In elke klas zitten 7 leerlingen met blauwe ogen, de anderen hebben bruine ogen. Als er iemand met bruine ogen bij de directeur geroepen wordt, hoe groot is dan de kans dat deze leerling uit klas A komt?

(A) 17/37

(B) 17/34

(C) 27/37

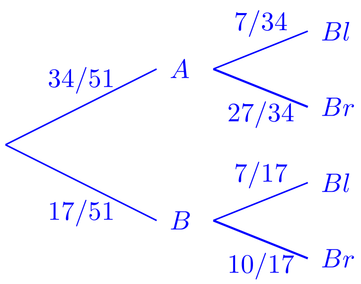
(D) 37/51

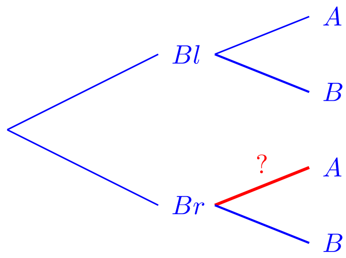
Oplossing Voor een leerling noteren we met

Bl de leerling heeft blauwe ogen,

Br de leerling heeft bruine ogen.

We brengen de gegevens aan in twee kansbomen:





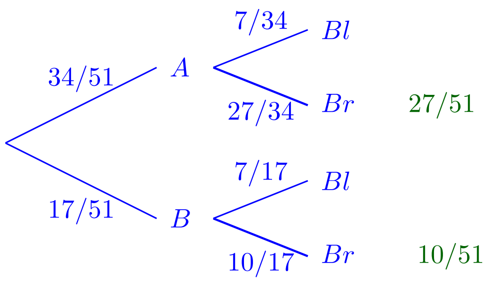
Gevraagd is de kans $P(A \mid Br)$. Uit de kanswet *kans op doorsnede* volgt:

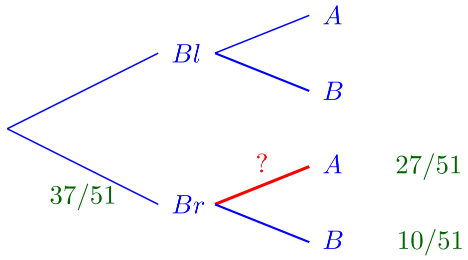
$$P(A \cap Br) = P(A) \cdot P(Br \mid A) = \frac{34}{51} \cdot \frac{27}{34} = \frac{27}{51} \quad \text{en} \quad P(B \cap Br) = P(B) \cdot P(Br \mid B) = \frac{17}{51} \cdot \frac{10}{17} = \frac{10}{51}$$

waaruit:

$$P(Br) = P(A \cap Br) + P(B \cap Br) = \frac{27}{51} + \frac{10}{51} = \frac{37}{51}.$$

Dit konden we ook meteen inzien, want in het totaal hebben 14 leelingen blauwe ogen, zodat $51 - 14 = 37$ leerlingen bruine ogen hebben. Zo kunnen we de kansbomen verder aanvullen:





Opnieuw toepassen van de kanswet *kans op doorsnede* geeft dan het gevraagde:

$$P(A \mid Br) = \frac{P(A \cap Br)}{P(Br)} = \frac{27/51}{37/51} = \frac{27}{37}.$$

Antwoord C

Oefening 20 Je hebt een doos met 7 gele en 3 blauwe ballen. Hieruit trekt je lukraak tegelijk twee ballen. Hoe groot is de kans dat je een gele en een blauwe bal trekt?

(A) 1/3

(B) 2/3

(C) 7/15

(D) 3/7

Oplossing Noem bij het trekken van een bal

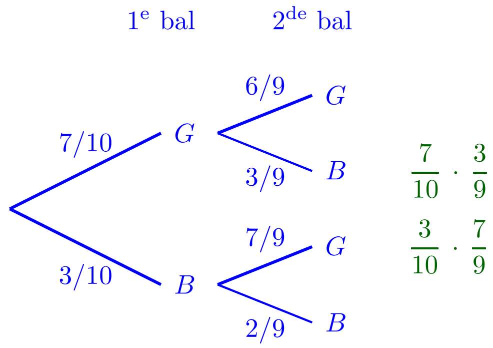
G de bal is geel,

B de bal is blauw.

Om de kans te berekenen hoeven we de ballen niet tegelijk te trekken:

$$\begin{aligned} P(\text{een gele bal en een blauwe bal}) &= P(\text{eerste bal } G \text{ en tweede bal } B \textbf{ of } \text{eerste bal } B \text{ en tweede bal } G) \\ &= P(GB \cup BG) \\ &= P(GB) + P(BG) \qquad \text{(somregel)} \end{aligned}$$

De kans dat de tweede bal blauw is hangt af van de kans dat de eerste bal geel is. Daarom berekenen we deze kansen met behulp van een kansboom:



zodat:

$$P(\text{een gele bal en een blauwe bal}) = P(GB) + P(BG) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}.$$

Antwoord C

Oefening 21 Men beschikt over een stel kaarten dat bestaat uit 4 heren, 4 dames en 4 boeren. Hieruit trekt men lukraak twee kaarten. Wat is de kans dat het twee dames zijn?

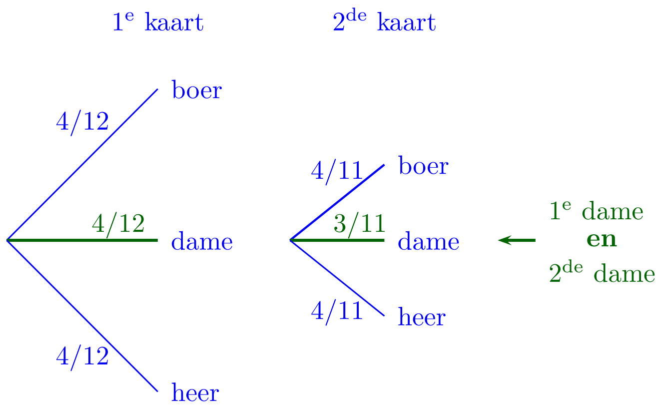
(A) De kans is groter dan 10%.

(B) De kans is groter dan 9%, maar kleiner dan 10%.

(C) De kan is groter dan 8%, maar kleiner dan 9%.

(D) De kans is kleiner dan 8%.

Oplossing De kans dat de tweede kaart een dame is hangt af van de kans dat de eerste kaart een dame is. Daarom berekenen we de gevraagde kans met behulp van een kansboom:



zodat $P(1^{\text{e}} \text{ dame en } 2^{\text{de}} \text{ dame}) = \dfrac{4}{12} \cdot \dfrac{3}{11} = \dfrac{1}{11} = 0,9090\ldots$.

Antwoord B

Oefening 22 Hieronder staan resultaten van een onderzoek over het verband tussen roken en een bepaalde hart-en vaatziekte.

- De bevolking is onderverdeeld in 86% niet-rokers en 14% rokers.
- 20% procent van de mensen heeft de hart-en vaatziekte.
- 40% van de mensen met de hart-en vaatziekte rookt.

Hoe procent van de rokers heeft de hart-en vaatziekte?

(A) 40%
(B) 57%
(C) 30%
(D) 16%

Oplossing Voor een persoon noteren we met:

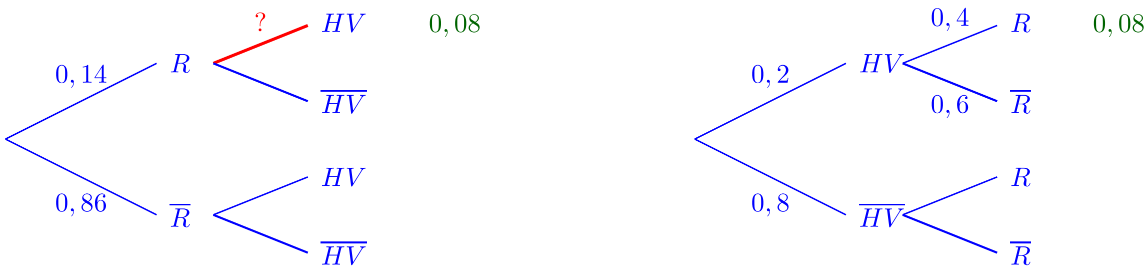
R de persoon is een roker,
HV de persoon heeft een hart-en vaatziekte.

We brengen de gegevens aan in twee kansbomen:

Gevraagd is de kans $P(HV \mid R)$. Uit de kanswet *kans op doorsnede* volgt:

$$P(R \cap HV) = P(R) \cdot P(HV \mid R) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$$

zodat we de kansbomen verder kunnen aanvullen:



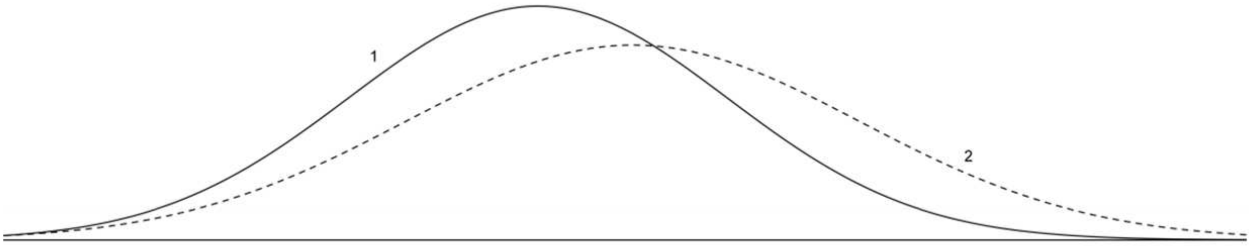
Opnieuw toepassen van de kanswet *kans op doorsnede* geeft dan het gevraagde:

$$P(HV \mid R) = \frac{P(R \cap HV)}{P(R)} = \frac{0,08}{0,14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \approx 57\%.$$

Antwoord B

Statistiek

Oefening 23 Gegeven zijn de grafieken van twee normale verdelingen.



Grafiek 1 is de normale dichtheidsfunctie met gemiddelde μ_1 en standaardafwijking σ_1.
Grafiek 2 is de normale dichtheidsfunctie met gemiddelde μ_2 en standaardafwijking σ_2.
Welke van de onderstaande uitspraken is waar?

(A) $\mu_1 < \mu_2$ en $\sigma_1 < \sigma_2$

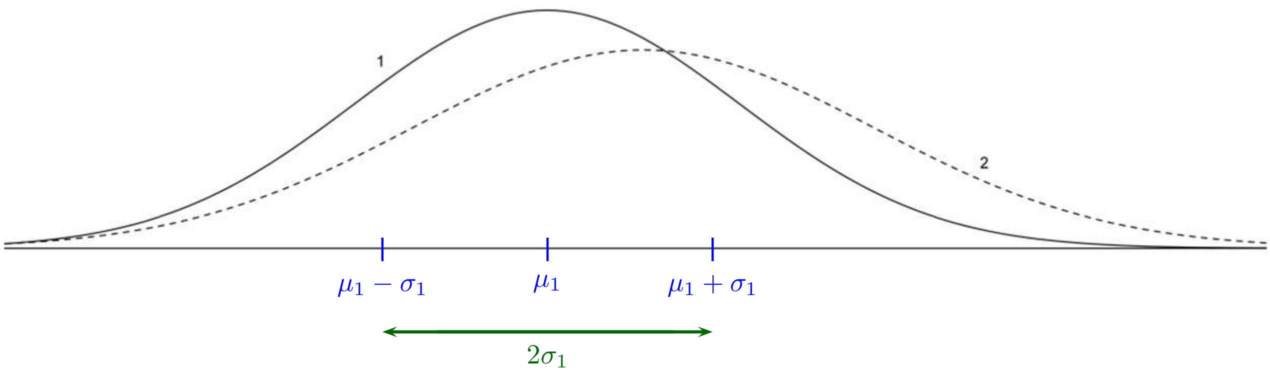
(B) $\mu_1 < \mu_2$ en $\sigma_1 > \sigma_2$

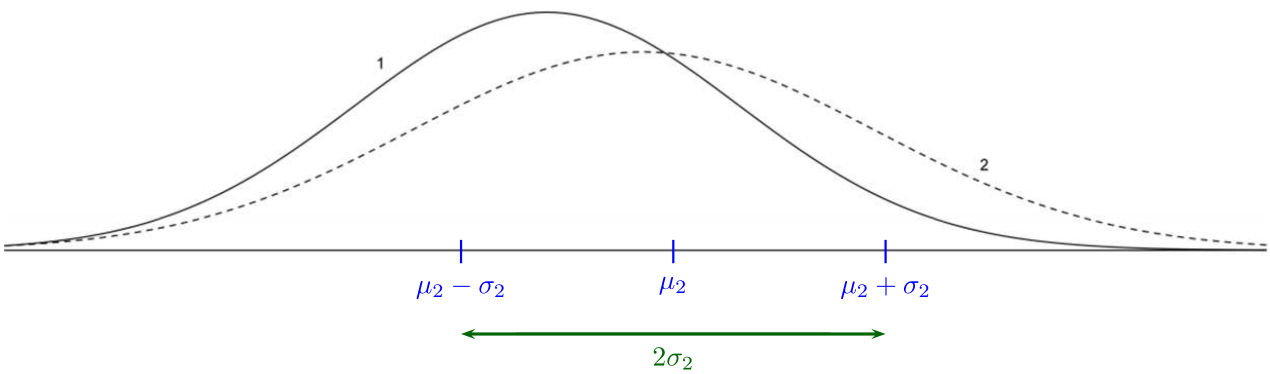
(C) $\mu_1 > \mu_2$ en $\sigma_1 < \sigma_2$

(D) $\mu_1 > \mu_2$ en $\sigma_1 > \sigma_2$

(E) $\mu_1 > \mu_2$ en $\sigma_1 = \sigma_2$

Oplossing De top van een normale verdeling bevindt zich boven het gemiddelde μ en de buigpunten van een normale verdeling bevinden zich boven $\mu \pm \sigma$. Brengen we deze eigenschappen aan op bovenstaande grafieken dan vinden we onmiddellijk dat $\mu_1 < \mu_2$ en $\sigma_1 < \sigma_2$.





Antwoord A

Oefening 24 Het gemiddelde van de schoenmaten van een groep van 10 personen bedraagt 40. Bij deze groep moeten zich n personen met een schoenmaat 44 voegen om een gemiddelde schoenmaat van 43 te verkrijgen. Welke uitspraak over het aantal n is dan juist?

(A) n is een veelvoud van 11

(B) n is een veelvoud van 6

(C) n is een veelvoud van 7

(D) n is een veelvoud van 8

Oplossing Om het nieuwe gemiddelde te berekenen, mogen we aannemen dat de schoenmaat van elke persoon in de groep van 10 gelijk is aan 40, zodat

$$43 = \frac{10 \cdot 40 + n \cdot 44}{10 + n} \quad \Rightarrow \quad 400 + 11n = 430 + 43n$$
$$\Rightarrow \quad n = 30.$$

Antwoord B

Oefening 25 Intelligentie wordt gemeten via testen en wordt uitgedrukt in het intelligentiequotiënt (IQ). Het IQ is normaal verdeeld met gemiddelde 100 en standaardafwijking 15. Een persoon met een IQ van 130 of meer wordt hoogbegaafd genoemd. Hoeveel procent van de bevolking is hoogbegaafd?

(A) 1%

(B) 2%

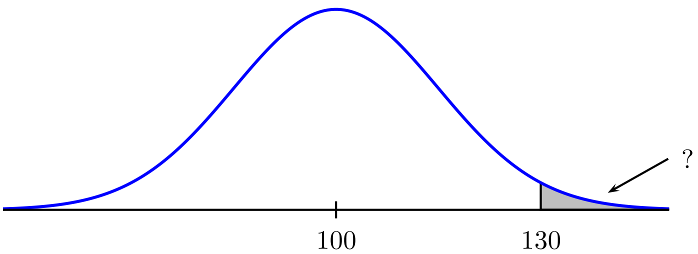
(C) $2,5\%$

(D) 5%

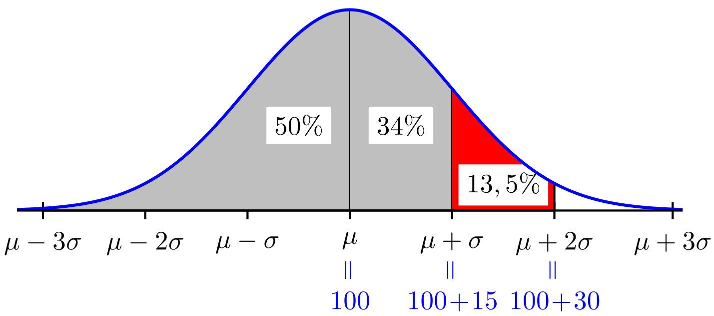
(E) 10%

Oplossing

We zijn op zoek naar de oppervlakte onder de normale verdeling tot de x-waarde 130:



We duiden de bijzondere oppervlaktes onder de normale verdeling aan:



waaruit volgt dat de gevraagde oppervlakte gelijk is aan:

$$100\% - (50\% + 34\% + 13,5\%) = 100\% - 97,5\% = 2,5\%.$$

Antwoord C

Oefening 26 Geboortegewichten in een bepaalde bevolkingsgroep zijn normaal verdeeld. Stel dat in een bepaalde regio het gemiddeld geboortegewicht 3400 gram is met standaardafwijking 550 gram. Hoeveel procent (ongeveer) van de pasgeborenen in die regio hebben dan een gewicht tussen 2850 en 4500 gram?

(A) 68%

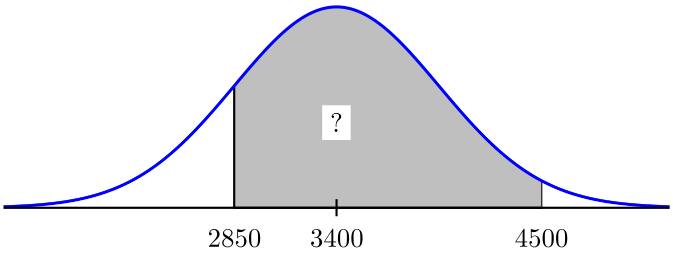
(B) 95%

(C) 75%

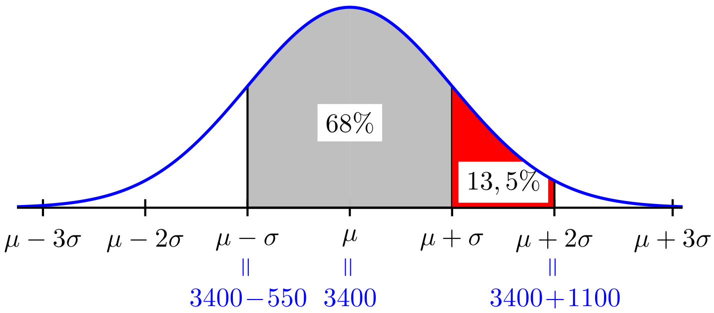
(D) 50%

(E) 82%

Oplossing We zijn op zoek naar de oppervlakte onder de normale verdeling van de x-waarde 2850 tot de x-waarde 4500:



We duiden de bijzondere oppervlaktes onder de normale verdeling aan:



waaruit volgt dat de gevraagde oppervlakte gelijk is aan:

$$68\% + 13,5\% = 81,5\% \approx 82\%.$$

Antwoord E

Oefening 27 Een student moet het gemiddelde van drie meetresultaten x, y en z bepalen. Hij doet dit echter niet op de gebruikelijke manier. Hij bepaalt het deelgemiddelde m' van x en y, vervolgens neemt hij het gemiddelde m'' van het deelgemiddelde van m' en y. Gegeven is dat $x < y < z$. Wat kan je zeggen over het reële gemiddelde m, het berekende gemiddelde m'' en het deelgemiddelde m'?

(A) m' is altijd groter dan m''

(B) m is altijd groter dan m'

(C) m'' is altijd gelijk aan m

(D) m'' is altijd groter dan m

Oplossing Nemen we bijvoorbeeld $x = 0$, $y = 1$ en $z = 2$ dan vinden we:

$$m = \frac{x+y+z}{3} = 1, \quad m' = \frac{x+y}{2} = 0,5 \quad \text{en} \quad m'' = \frac{m'+y}{2} = \frac{1,5}{2} = 0,75$$

zodat in dit voorbeeld $m' < m'' < m$. Zo kunnen we uitspraken (A), (C) en (D) elimineren zodat enkel uitspraak (B) waar kan zijn.

Antwoord B

Oefening 28 Intelligentiequotiënt (IQ) is over de wereldbevolking normaal verdeeld, met gemiddelde 100. Je weet dat 9% een IQ heeft van 120 of hoger. Hoeveel procent heeft dan een IQ van 80 of lager?

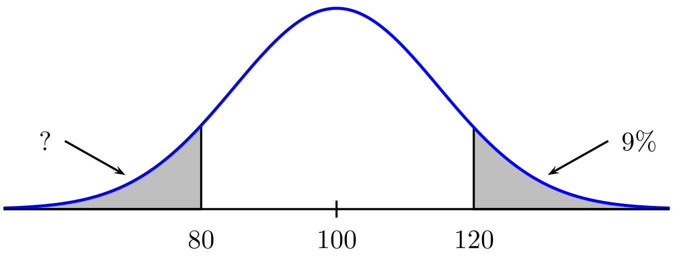
(A) 9%

(B) 18%

(C) 91%

(D) We kunnen dit niet beantwoorden zonder kennis van de standaarddeviatie.

Oplossing We brengen de gegevens en het gevraagde aan op een schets van de normale verdeling:



Omdat de grafiek symmetrisch is ten opzichte van de top (met x-waarde 100), is de gevraagde oppervlakte ook gelijk aan 9%.

Antwoord A

Oefening 29 Glaucoom is een oogziekte waarbij de druk in de oogbol te hoog is. De druk in de oogbol is normaal verdeeld met 16 mmHg als gemiddelde en standaardafwijking 3 mmHg. Men noemt de druk normaal indien die ligt tussen 12 en 20 mmHg. Hoeveel procent van de bevolking heeft dan een normale oogdruk?

(A) ongeveer 50%

(B) ongeveer 68%

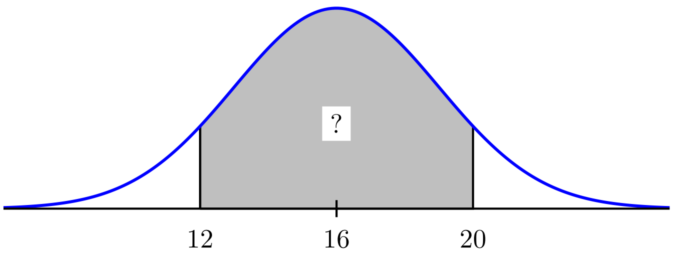
(C) ongeveer 75%

(D) ongeveer 82%

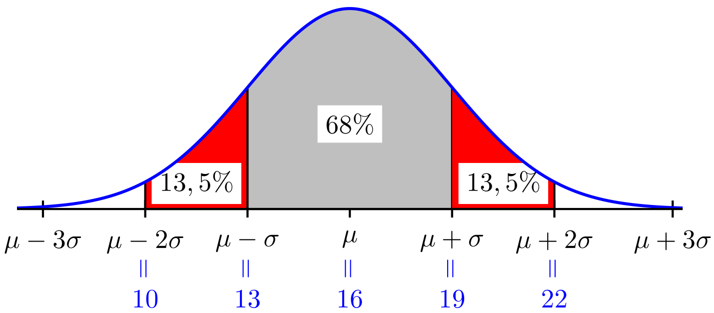
(E) ongeveer 95%

Oplossing

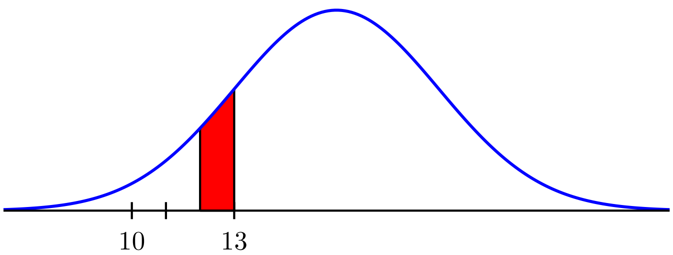
We zijn op zoek naar de oppervlakte onder de normale verdeling van de x-waarde 12 tot de x-waarde 20:



We duiden de bijzondere oppervlaktes onder de normale verdeling aan:



waaruit volgt dat de gevraagde oppervlakte ligt tussen 68% en 95%. Op die manier kunnen we uitspraken (A), (B) en (E) uitsluiten. Mocht uitspraak (C) waar zijn, dan zou de oppervlakte aangeduid in onderstaande figuur gelijk zijn aan de helft van $75\% - 68\%$, dus gelijk zijn aan $3,5\%$:



Maar dat zou betekenen dat de oppervlakte tussen x-waarde 10 en x-waarde 13 minder is dan drie keer $3,5\%$, dus minder is dan $10,5\%$. En dat is in strijd met onze kennis over de bijzondere oppervlaktes onder de normale verdeling: de oppervlakte tussen x-waarde 10 en x-waarde 13 is gelijk aan $13,5\%$. We besluiten dat uitspraak (C) leidt tot een tegenstrijdigheid, zodat enkel uitspraak (D) waar kan zijn.

Antwoord D

Oefening 30 Neem aan dat de verdeling van de diastolische bloeddruk bij 35-44 jaar oude mannen normaal verdeeld is met een gemiddelde van 80 mmHg en standaardafwijking 12 mmHG. De 5% mannen met de hoogste diastolische bloeddruk hebben een diastolische bloeddruk van minstens

(A) 85 mmHG

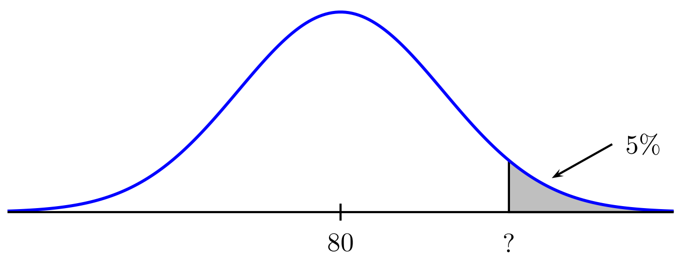
(B) 90 mmHG

(C) 92 mmHG

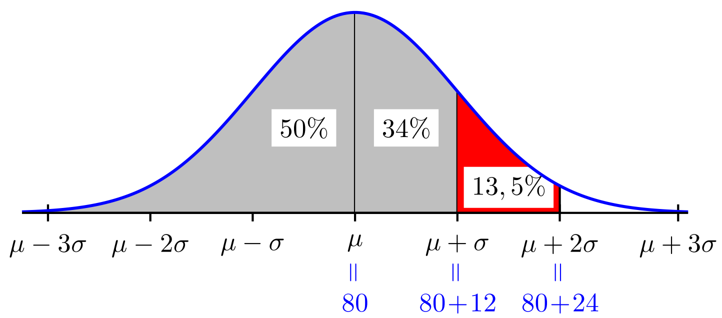
(D) 100 mmHG

(E) 104 mmHG

Oplossing Gevraagd is de x-waarde waarvoor de oppervlakte onder de normale verdeling vanaf die x-waarde gelijk is aan 5%:



We duiden de bijzondere oppervlaktes onder de normale verdeling aan:



De totale gearceerde oppervlakte is gelijk aan $50\% + 34\% + 13,5\% = 97,5\%$. Op die manier zien we in dat de gevraagde x-waarde ligt tussen 92 en 104 (grenzen niet inbegrepen), en dat is enkel mogelijk bij uitspraak (D).

Antwoord D