PYTHAGORAS EN LINEAIRE TRANSFORMATIES

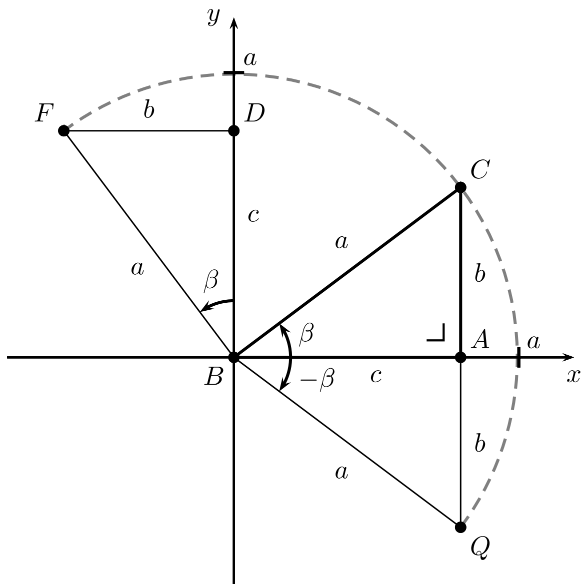
KOEN DE NAEGHEL EN LUC GHEYSENS

SAMENVATTING. Een eenvoudige redenering in de theorie van lineaire transformaties en hun matrixvoorstelling in het vlak leidt tot de stelling van Pythagoras. Voor zover we weten kwam ons argument nog niet voor in de lange lijst van bewijzen van de stelling van Pythagoras. Kan de kritische lezer een cirkelredenering ontdekken?

Afspraak. We werken in het Euclidisch vlak. In een driehoek noteren we de hoekpunten met Latijnse hoofdletters $A, B, \ldots$ en de tegenoverliggende zijden met de corresponderende kleine letters $a, b, \ldots$. Hoeken worden genoteerd met Griekse letters: α voor de hoek in A, β voor de hoek in B, enzovoort. Met de schrijfwijze ΔABC verwijzen we naar een driehoek met hoekpunten A, B en C.

Stelling van Pythagoras. Beschouw een driehoek ABC met rechte hoek in A. Dan geldt $a^2 = b^2 + c^2$.

Bewijs. We voeren een orthonormaal assenstelsel in zoals aangegeven op onderstaande figuur. De onderstelde rechte hoek in A heeft als gevolg dat de y-as evenwijdig is met de rechte AC.



Beschouw de lineaire[1] transformatie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die hoort bij de rotatie over de hoek β om de oorsprong. Dan is $T(a, 0) = (c, b)$ en aan de hand van de congruente driehoeken ΔDBF en ΔABC zien we in dat $T(0, a) = (-b, c)$. Bijgevolg wordt de matrix M van T ten opzichte van de geordende standaardbasis $\mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ gegeven door[2]

$$M = \begin{bmatrix} c/a & -b/a \\ b/a & c/a \end{bmatrix}$$

Een analoge redenering voor de lineaire transformatie T^{-1} die hoort bij de rotatie over de hoek $-\beta$ om de oorsprong, waarbij driehoek ABC vervangen wordt door de congruente driehoek ABQ, levert de inverse matrix van M

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} c/a & b/a \\ -b/a & c/a \end{bmatrix}$$

Werken we tenslotte de matrixidentiteit $M \cdot M^{-1} = I$ uit, dan bekomen we

$$\begin{bmatrix} c/a & -b/a \\ b/a & c/a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c/a & b/a \\ -b/a & c/a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2/a^2 + b^2/a^2 & 0 \\ 0 & b^2/a^2 + c^2/a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en uit het vergelijken van overeenkomstige elementen volgt $a^2 = b^2 + c^2$. □

E-mail address, K. De Naeghel, L. Gheysens: `koendenaeghel@hotmail.com, lucgheysens@yahoo.com`

Datum: 2 juni 2012.

[1] Dat de afbeelding T lineair is, i.e. voldoet aan $\forall u, v \in \mathbb{R}^2 : T(u + v) = T(u) + T(v)$ en $\forall r \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^2 : T(ru) = rT(u)$, bewijst men met behulp van congruentiekenmerken.

[2] De matrix van een lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ten opzichte van een geordende basis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ van $\mathbb{R}^n$ bekomt men door in de i-de kolom de coördinaten van $T(e_i)$ ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$ te plaatsen.